

Formeel Denken 2010
Uitwerkingen Toets 1: Propositielogica
(22/09/10)

1. (a) Zoals gebruikelijk zijn er verschillende oplossingen mogelijk:
- $(P \rightarrow \neg C)$: Als de regering paars is, zit het CDA er niet in.
 - $(P \leftrightarrow \neg C)$: Als de regering paars is, zit het CDA er niet in, maar ook elke regering zonder CDA is paars. Omdat die omkering in onze echte wereld niet waar is (een regering waarin alleen de PvdA zit heet rood en niet paars!) vinden we de eerste oplossing iets beter.
- (b) Enkele oplossingen:
- $(R \rightarrow \neg L)$: Als de VVD in de regering zit, dan zit de PvdA er niet in.
 - $(L \rightarrow \neg R)$: Als de PvdA in de regering zit, dan zit de VVD er niet in.
 - $((L \rightarrow \neg R) \wedge (R \rightarrow \neg L))$: Als de PvdA in de regering zit, dan zit de VVD er niet in en vice versa.
 - $\neg(L \wedge R)$: Het is niet zo dat PvdA en VVD samen in de regering zitten.

Bovenstaande oplossingen hebben allemaal dezelfde waarheidstabel. Ook geeft de oorspronkelijke zin geen voorkeur aan voor de een of de andere formule. Let wel: de formule $(L \leftrightarrow \neg R)$ is niet goed, want dan zeg je ondermeer dat als de PvdA niet in de regering zit, de VVD er wel in zit en dat hoeft natuurlijk niet zo te zijn.

2. (a)

R	L	C	$\neg R$	$(L \wedge C)$	$(\neg R \rightarrow (L \wedge C))$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

Als de VVD niet in de regering zit dan zitten zowel de PvdA als het CDA in de regering.

- (b)

L	R	$\neg R$	$(L \rightarrow \neg R)$	$\neg(L \rightarrow \neg R)$
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1

De meest directe vertaling is *Het is niet zo dat als de PvdA in de regering zit dat de VVD er dan niet in zit.*

Echter als we dit vergelijken met het antwoord bij 1b dan is dit ook een goede vertaling: *Het is niet zo dat de PvdA niet met de VVD wil regeren.* Maar dat is feitelijk hetzelfde als: *De PvdA wil best met de VVD regeren.*

Evenwel als we naar de waarheidstabel kijken dan is het duidelijk dat de formule logisch equivalent is aan $(L \wedge R)$ en dus is een andere vertaling: *Zowel de PvdA als de VVD regeren.*

3. De officiële notatie volgens de grammatica is:

$$((a \rightarrow b) \leftrightarrow (\neg b \rightarrow \neg a))$$

Dit geeft de waarheidstabel:

a	b	$(a \rightarrow b)$	$\neg b$	$\neg a$	$(\neg b \rightarrow \neg a)$	$((a \rightarrow b) \leftrightarrow (\neg b \rightarrow \neg a))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

4. Ja, die bestaan. Neem

$$\begin{aligned} f &:= a \\ g &:= b \end{aligned}$$

Dit geeft de waarheidstabel:

a	b	f	g	$(f \leftrightarrow g)$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Geen van de drie laatste kolommen bevat alleen enen, dus voor ieder van de formules f , g en $(f \leftrightarrow g)$ is er een model waarin die formule niet waar is. En dus $\not\models (f \leftrightarrow g)$, terwijl toch $\models f$ en $\models g$ allebei onwaar zijn.

5. Neem

$$h := (\neg a \vee b)$$

Uit de waarheidstabel

a	b	$\neg a$	h $(\neg a \vee b)$	$(a \rightarrow b)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

blijkt dat h en $a \rightarrow b$ in precies dezelfde modellen waar zijn (de kolommen zijn gelijk), en dus geldt $h \equiv a \rightarrow b$.