

Formeel Denken 2014
Tentamen
(29/01/15)

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Er zijn vijftien opgaven (drie per hoofdstuk uit de syllabus), die ieder zes punten waard zijn. Het cijfer voor dit tentamen is het aantal punten gedeeld door tien, en de eerste tien punten zijn gratis. Veel succes!

1. Benader de betekenis van de volgende Nederlandse zin zo goed mogelijk (6 punten) door een formule van de propositielogica:

Als het regent word ik nat, en het regent, maar ik word toch niet nat!

Gebruik hierbij het woordenboek:

R het regent
 N ik word nat

2. Deze opgave gaat over de formule

$$a \rightarrow \neg b \leftrightarrow \neg b \rightarrow a$$

- (a) Schrijf deze formule met haakjes volgens de officiële grammatica uit (3 punten) de syllabus.
(b) Geef de waarheidstabel van deze formule. (3 punten)
3. Deze opgave gaat over de uitspraak (6 punten)

$$f \rightarrow \neg g \equiv g \rightarrow \neg f$$

waarbij f en g formules van de propositielogica zijn.

- (a) Leg uit wat deze uitspraak betekent. (3 punten)
(b) Geldt deze uitspraak voor $f = a$ en $g = b$? (3 punten)
4. Benader de betekenis van de volgende Nederlandse zin zo goed mogelijk (6 punten) door een formule van de predikaatlogica:

Als een man van vrouwen houdt, dan is er een vrouw die van die man houdt.

Gebruik hierbij het woordenboek:

M het domein van de mannen
 V het domein van de vrouwen
 $H(x, y)$ x houdt van y

Interpreteer deze zin als een uitspraak over alle mannen.

5. Benader de betekenis van de volgende Nederlandse zin zo goed mogelijk door een formule van de predikaatlogica met gelijkheid: (6 punten)

Er bestaat precies één vrouw waar alle mannen van houden.

Gebruik hierbij het woordenboek uit de vorige opgave.

6. Geef een interpretatie I_6 in een model M_6 waaronder de volgende formule van de predikaatlogica met gelijkheid waar is: (6 punten)

$$\forall x \in D \exists y \in D (x \neq y \wedge \forall z \in D (R(x, z) \leftrightarrow z = y))$$

Verklaar je antwoord.

7. Geef een taal L_7 met alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ waarvoor geldt dat (6 punten)

$$L_7^* \cap \overline{L_7}^* \neq \{\lambda\}$$

Verklaar je antwoord.

8. Geef een eindige automaat met een minimaal aantal toestanden die de taal (6 punten)

$$L_8 := \mathcal{L}((aa \cup bb \cup (ab \cup ba)(aa \cup bb)^*(ab \cup ba))^*)$$

herkent.

9. De volgende opgave gaat over de contextvrije grammatica G_9 :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AS \mid \lambda \\ A &\rightarrow ab \end{aligned}$$

- (a) Is G_9 rechtslineair? Verklaar je antwoord. (1 punt)
 (b) Is $\mathcal{L}(G_9)$ regulier? Verklaar je antwoord. (1 punt)
 (c) Geef een invariant die laat zien dat (4 punten)

$$ba \notin \mathcal{L}(G_9)$$

Verklaar je antwoord.

10. Geef een boom met 5775 punten waarin het langste pad lengte 2015 heeft. (6 punten)
 Schrijf je antwoord als paar $\langle P_{10}, L_{10} \rangle$.

11. De volgende opgave gaat over de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} f(m, 0) &= 0 \\ f(m, n + 1) &= f(m, n) + m \end{aligned}$$

- (a) Laat zien hoe je $f(3, 3)$ berekent met behulp van deze recursievergelijkingen. (2 punten)

(b) Bewijs met inductie naar n dat (4 punten)

$$f(m, n) = m \cdot n$$

voor alle $m, n \geq 0$.

12. Jan, Piet en Klaas willen zes verschillende objecten onder elkaar verdelen, waarbij ieder twee objecten moet krijgen. Op hoeveel manieren kunnen ze dit doen? Leg uit hoe je dit hebt uitgerekend, en geef aan welke binomiaalcoëfficiënten je hiervoor hebt gebruikt. (6 punten)
13. Benader de betekenis van de volgende Nederlandse zin zo goed mogelijk door een formule van de epistemische logica: (6 punten)

Ik weet dat ik als het regent niet nat word, want als ik weet dat het regent neem ik een paraplu mee, en als ik een paraplu meeneem weet ik dat ik niet nat word.

Gebruik hierbij het woordenboek:

R het regent
 N ik word nat
 P ik neem een paraplu mee

14. Geef een serieel Kripke-model waarin de formule $(\Box a \rightarrow \Box b) \rightarrow \Box(a \rightarrow b)$ niet waar is. Verklaar je antwoord. (6 punten)
15. Geef een LTL formule die uitdrukt dat a steeds opnieuw waar wordt, maar dat tussen twee tijdstippen waarop a waar is altijd b eerst ook een keer waar moet zijn geweest. (6 punten)