

# Berekenbaarheid 2012

## Toets 3

16 januari 2013

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Bij ieder onderdeel is het aantal punten aangegeven, 1 punt is gratis. Veel succes!

1. Geef numerieke functies  $f_1$ ,  $f_2$  en  $f_3$  zodat geldt dat: (2 punten)

$$\begin{aligned}f_1 \circ (f_2, f_3) &= \text{pred} \\ f_2 \circ f_3 &= s\end{aligned}$$

(Hierin zijn  $s$  en  $\text{pred}$  de successor en de predecessor.) Is het hierbij mogelijk dat één van deze functies  $f_1$ ,  $f_2$  en  $f_3$  niet totaal is? Verklaar je antwoord. Geef ook van ieder van deze drie functies de ariteit.

2. De volgende recursievergelijkingen vormen een recursieve definitie van een functie  $f$ : (3 punten)

$$\begin{aligned}f(x, 0) &= (x + 1)^2 \\ f(x, y + 1) &= f(x, y)^{\frac{f(x, y)}{x+1}}\end{aligned}$$

Geef de waarde van  $f(1, 2)$ . (Hierbij hoeft je machten van 2 niet uit te rekenen.) Geef vervolgens functies  $g$  en  $h$  zodat

$$f = \text{primrec}(g, h)$$

Schrijf deze functies  $g$  en  $h$  (ook) als compositie van functies op de achterzijde van dit blaadje. Geef tenslotte de ariteiten van  $f$ ,  $g$  en  $h$ .

3. We definiëren  $\text{primefactorsum}(x)$  voor  $x > 0$  als de som van de priemfactoren van het argument  $x$ . Hierbij telt ieder priemgetal maar één keer mee. Omdat  $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ , geldt dus  $\text{primefactorsum}(12) = 2 + 3 = 5$ . Voorts is  $\text{primefactorsum}(0) = 0$ . (3 punten)

Laat zien dat de functie  $\text{primefactorsum}$  primitief recursief is. Je mag hierbij gebruiken dat de functies op de achterkant van dit blaadje primitief recursief zijn.

4. Bestaan er  $\mu$ -recursieve functies die niet primitief recursief zijn? Bewijs je antwoord. (1 punt)

	$\text{id}(x) = x$	
	$z(x) = 0$	
	$s(x) = x + 1$	
	$p_i^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = x_i$	
	$c_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = n$	
$\text{pred}(y) = y \dot{-} 1$	$\text{eq}(x, y) =$	als $x = y$ dan 1 anders 0
$\text{add}(x, y) = x + y$	$\text{ne}(x, y) =$	als $x \neq y$ dan 1 anders 0
$\text{mult}(x, y) = x \cdot y$	$\text{max}(x, y) =$	het maximum van $x$ en $y$
$\text{sub}(x, y) = x \dot{-} y$	$\text{min}(x, y) =$	het minimum van $x$ en $y$
$\text{exp}(x, y) = x^y$	$\text{quo}(x, y) =$	als $y \neq 0$ dan $\lfloor x/y \rfloor$ anders 0
$\text{fact}(x) = x!$	$\text{rem}(x, y) =$	als $y \neq 0$ dan $x \bmod y$ anders $x$
$\text{sg}(x) =$	$\text{divides}(x, y) =$	als $y \neq 0$ en $y \mid x$ dan 1 anders 0
als $x \neq 0$ dan 1 anders 0	$\text{even}(x) =$	als $x$ even is dan 1 anders 0
$\text{cosg}(x) =$	$\text{prime}(x) =$	als $x$ priem is dan 1 anders 0
als $x \neq 0$ dan 0 anders 1	$\text{pn}(x) =$	het $x$ -de priemgetal
$\text{lt}(x, y) =$		(dus $\text{pn}(0) = 2$ , $\text{pn}(1) = 3$ , etc.)
als $x < y$ dan 1 anders 0		
$\text{gt}(x, y) =$		
als $x > y$ dan 1 anders 0		
$\text{le}(x, y) =$		
als $x \leq y$ dan 1 anders 0		
$\text{ge}(x, y) =$		
als $x \geq y$ dan 1 anders 0		