

## Berekenbaarheid 2013

### Toets 3

15 januari 2014

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Er zijn 9 onderdelen die ieder 1 punt opleveren, 1 punt is gratis. Veel succes!

1. (a) Geef numerieke functies  $f_1, f_2, f_3$  en  $f_4$  met

$$f_1(1, 1, 1) = 0$$

$$f_1 \circ (f_2, f_3, f_4) = \text{add}$$

- (b) Geef de ariteiten van deze vier functies, en laat zien dat deze kloppen met de functiecompositie uit de tweede vergelijking.
- (c) Is het mogelijk dat  $f_1$  onder deze voorwaarden niet totaal is? En is het ook mogelijk dat  $f_2$  onder deze voorwaarden niet totaal is?
2. (a) De numerieke functie `xmod` is gedefinieerd door de recursievergelijkingen:

$$\text{xmod}(x, 0) = 0$$

$$\text{xmod}(x, y + 1) = \text{sg}(x \dot{-} s(\text{xmod}(x, y))) \cdot s(\text{xmod}(x, y))$$

Geef de waarden van `xmod(3, 0)`, `xmod(3, 1)`,  $\dots$ , `xmod(3, 4)`.

- (b) Geef numerieke functies  $g$  en  $h$  zodat
- $$\text{xmod} = \text{primrec}(g, h)$$
- (c) Geef de ariteiten van de functies `xmod`,  $g$  en  $h$ , en laat zien dat deze kloppen met de definitie met primitieve recursie.
- (d) Schrijf de functies  $g$  en  $h$  als compositie van functies uit de lijst op de andere kant van dit blaadje.
3. (a)  $k(x)$  is gedefinieerd als het kleinste getal  $y \geq 1$  waarvoor

$$\{y, y + 1, y + 2, \dots, (x + 1)y - 1, (x + 1)y\}$$

geen priemgetallen bevat. Als zo'n getal niet bestaat is  $k(x)$  ongedefinieerd. Bereken  $k(0)$ .

- (b) Laat zien dat deze functie  $\mu$ -recursief is. Je mag gebruiken dat de functies aan de achterkant van dit blaadje primitief recursief zijn.

	$\text{id}(x)$	$= x$		
	$z(x)$	$= 0$		
	$s(x)$	$= x + 1$		
	$p_i^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$	$= x_i$		
	$c_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$	$= n$		
$\text{pred}(y)$	$= y \dot{-} 1$		$\text{eq}(x, y)$	$=$ als $x = y$ dan 1 anders 0
$\text{add}(x, y)$	$= x + y$		$\text{ne}(x, y)$	$=$ als $x \neq y$ dan 1 anders 0
$\text{mult}(x, y)$	$= x \cdot y$		$\text{max}(x, y)$	$=$ het maximum van $x$ en $y$
$\text{sub}(x, y)$	$= x \dot{-} y$		$\text{min}(x, y)$	$=$ het minimum van $x$ en $y$
$\text{exp}(x, y)$	$= x^y$		$\text{quo}(x, y)$	$=$ als $y \neq 0$ dan $\lfloor x/y \rfloor$ anders 0
$\text{fact}(x)$	$= x!$		$\text{rem}(x, y)$	$=$ als $y \neq 0$ dan $x \bmod y$ anders $x$
$\text{sg}(x)$	$=$ als $x \neq 0$ dan 1 anders 0		$\text{divides}(x, y)$	$=$ als $y \neq 0$ en $y \mid x$ dan 1 anders 0
$\text{cosg}(x)$	$=$ als $x \neq 0$ dan 0 anders 1		$\text{even}(x)$	$=$ als $x$ even is dan 1 anders 0
$\text{lt}(x, y)$	$=$ als $x < y$ dan 1 anders 0		$\text{prime}(x)$	$=$ als $x$ priem is dan 1 anders 0
$\text{gt}(x, y)$	$=$ als $x > y$ dan 1 anders 0		$\text{pn}(x)$	$=$ het $x$ -de priemgetal
$\text{le}(x, y)$	$=$ als $x \leq y$ dan 1 anders 0			(dus $\text{pn}(0) = 2$ , $\text{pn}(1) = 3$ , etc.)
$\text{ge}(x, y)$	$=$ als $x \geq y$ dan 1 anders 0			