

Berekenbaarheid 2016
Toets 3
10 januari 2017

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Het cijfer voor deze toets is de som van de punten voor de opgaven, plus nog 1 gratis punt. Veel succes!

1. (a) Geef functies f_1 , f_2 en f_3 zo dat geldt: (1 punt)

$$\begin{aligned}f_1 \circ (f_2, f_3) &= s \\ f_1 \circ (f_3, f_2) &= e\end{aligned}$$

Hierin zijn s en e respectievelijk de successor-functie en de lege functie, dus $s(x) = x + 1$ en $e(x) \uparrow$ voor alle $x \in \mathbb{N}$.

- (b) Wat zijn de ariteiten van deze drie functies? (1 punt)
2. Wat is de definitie van het begrip ‘primitief recursieve functie’? (1 punt)
3. We definiëren de functie $f_4(x)$ door de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned}f_4(x, 0) &= 1 \\ f_4(x, y + 1) &= f_4(x, y) + xy + 1\end{aligned}$$

Er geldt bijvoorbeeld $f_4(4, 32) = 2017$.

- (a) Bereken $f_4(2, 2)$ en verklaar hoe je aan het antwoord bent gekomen. (1 punt)
- (b) Geef functies g_4 en h_4 zodanig dat (2 punten)

$$f_4 = \mathbf{primrec}(g_4, h_4)$$

Schrijf g_4 en h_4 als compositie van functies uit de lijst op de achterkant van dit blaadje.

4. We definiëren de functie f_5 door:

$$f_5(x, y) = \begin{cases} \lfloor \sqrt[x]{y} \rfloor & \text{als } x > 0 \\ \uparrow & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

Hierin betekent $\lfloor \dots \rfloor$ dat naar beneden wordt afgerond. Als $z^x \leq y < (z + 1)^x$ dan $f_5(x, y) = z$. Zo geldt bijvoorbeeld dat $f_5(3, 9) = \lfloor \sqrt[3]{9} \rfloor = \lfloor 2,08008382\dots \rfloor = 2$, en dat klopt met $2^3 = 8 \leq 9 < 3^3 = 27$.

- (a) Laat zien dan f_5 een μ -recursieve functie is. Je mag gebruiken dat de functies op de achterkant van dit blaadje primitief recursief zijn. (2 punten)
- (b) Is f_5 ook primitief recursief? Verklaar je antwoord. (1 punt)

Primitief recursieve functies

$$\text{id}(x) = x$$

$$z(x) = 0$$

$$s(x) = x + 1$$

$$p_i^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = x_i$$

$$c_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = n$$

$$\text{pred}(y) = y \dot{-} 1$$

$$\text{add}(x, y) = x + y$$

$$\text{mult}(x, y) = x \cdot y$$

$$\text{sub}(x, y) = x \dot{-} y$$

$$\text{exp}(x, y) = x^y$$

$$\text{fact}(x) = x!$$

$$\text{sg}(x) = \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$$

$$\text{cosg}(x) = \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1$$

$$\text{lt}(x, y) = \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$$

$$\text{gt}(x, y) = \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$$

$$\text{le}(x, y) = \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$$

$$\text{ge}(x, y) = \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$$

$$\text{eq}(x, y) = \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$$

$$\text{ne}(x, y) = \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$$

$$\text{max}(x, y) = \text{het maximum van } x \text{ en } y$$

$$\text{min}(x, y) = \text{het minimum van } x \text{ en } y$$

$$\text{quo}(x, y) = \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0$$

$$\text{rem}(x, y) = \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x$$

$$\text{divides}(x, y) = \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \mid x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$$

$$\text{even}(x) = \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0$$

$$\text{prime}(x) = \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0$$

$$\text{pn}(x) = \text{het } x\text{-de priemgetal}$$

(dus $\text{pn}(0) = 2$, $\text{pn}(1) = 3$, etc.)