

**Exercise 1.** a.

$$\frac{\frac{\frac{[B^y]}{A \rightarrow B} I[z] \rightarrow}{B \rightarrow A \rightarrow B} I[y] \rightarrow}{\frac{[(B \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow A^x]}{B \rightarrow A \rightarrow B} E \rightarrow} \frac{A}{((B \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A} I[x] \rightarrow$$

b.

$$\frac{x : (B \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash x : (B \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow A \quad \frac{x : (B \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow A, y : B, z : A \vdash y : B}{x : (B \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow A, y : B \vdash (\lambda z : A. y) : A \rightarrow B}}{x : (B \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash x(\lambda y : B. \lambda z : A. y) : (B \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow B}}{\frac{x : (B \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash x(\lambda y : B. \lambda z : A. y) : ((B \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A}{\vdash \lambda x : (B \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow A. x(\lambda y : B. \lambda z : A. y) : ((B \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A}}$$

c.

$$\begin{aligned} \lambda x : A \rightarrow B \rightarrow C. \lambda y : B. \lambda z : A. x z y \\ \lambda x : A \rightarrow B. \lambda y : C. \lambda z : C \rightarrow A. x (z y) \\ \lambda x : A \rightarrow A \rightarrow B. \lambda y : A. ((\lambda u : A. x u u) y) \end{aligned}$$

**Exercise 2.** a.

$$\frac{\frac{\frac{[\forall y. P(y) \rightarrow A^v]}{P(x) \rightarrow A} E\forall}{A} I[v] \rightarrow}{\frac{[P(x)^u]}{P(x) \rightarrow (\forall y. P(y) \rightarrow A) \rightarrow A} I[u] \rightarrow} E \rightarrow} \frac{\forall x. (P(x) \rightarrow (\forall y. P(y) \rightarrow A) \rightarrow A)}{I\forall}$$

b.

$$\Pi x : \text{Terms. } P x \rightarrow (\Pi y : \text{Terms. } P y \rightarrow A) \rightarrow A$$

c.

$$\lambda x : \text{Terms. } \lambda u : P x. \lambda v : (\Pi y : \text{Terms. } P y \rightarrow A). v x u$$

**Exercise 3.** a.

$$\frac{\frac{\frac{[\forall c. (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow a^u]}{(a \rightarrow b \rightarrow a) \rightarrow a} E\forall}{a} I[u] \rightarrow}{\frac{[a^v]}{b \rightarrow a} I[w] \rightarrow}{a \rightarrow b \rightarrow a} I[v] \rightarrow} E \rightarrow} \frac{a}{(\forall c. (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow a) \rightarrow a} I[u] \rightarrow$$

b.

$$(\Pi c : *. (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow a) \rightarrow a$$

c.

$$\lambda u : (\Pi c : *. (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow a). u a (\lambda v : a. \lambda w : b. v)$$

**Exercise 4.** a.

$$false := \forall a. a$$

The elimination rule for this *false* just is  $\forall$ -elimination:

$$\frac{\forall a. a}{B} E\forall$$

b.

$$P A (\lambda u : A. \lambda v : B. u)$$

c.

$$\lambda a : *. \lambda z : a. \lambda s : a \rightarrow a. z$$
$$\lambda a : *. \lambda z : a. \lambda s : a \rightarrow a. s z$$

**Exercise 5.** a. `Inductive Three : Set :=`

`| A : Three`  
`| B : Three`  
`| C : Three.`

b. `Inductive Zero : Set := .`

c. `forall P : natlist -> Prop,`

`P nil ->`

`(forall (n : nat) (l : natlist), P l -> P (cons n l)) ->`

`forall n : natlist, P n`

**Exercise 6.** a. `le_S 0 0 (le_n 0)`

b. `palindrome (cons (S 0) nil)`

c. `palindrome_one (S 0)`