1

We zetten eerst ieder formule om in een clausule

1. $Bx \leftarrow Ax$ (1)
2. $\forall x \forall y (P(x,y) \wedge C(y) \rightarrow \neg \exists z (P(x,z) \wedge D(z))$
   $... \rightarrow \forall z \neg (P(x,z) \wedge D(z))$
   $... \rightarrow \forall z (\neg P(x,z) \vee \neg D(z))$
   $\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge C(y) \rightarrow (\neg P(x,z)) \vee \neg D(z))$
   $\forall x \forall y \forall z (\neg P(x,y) \vee \neg C(y) \vee (\neg P(x,z)) \vee \neg D(z))$
   Als clausule:
   $\leftarrow P(x,y), C(y), P(x,z), D(z)$ (2)
3. $\forall x (E(x) \rightarrow \neg \exists y (P(x,y) \wedge B(y))$
   $E(x) \rightarrow \forall y \neg P(x,y) \vee \neg B(y)$
   $\forall y E(x) \rightarrow \neg P(x,y) \vee \neg B(y)$
   Als clausule:
   $\leftarrow E(x), P(x,y), B(y)$ (3)
4. $\exists x (P(a,x) \wedge (C(x) \vee A(x)))$
   $P(a,b) \wedge (C(b) \vee A(b)))$ (Nieuwe constante b)
   Als clausule:
   $P(a,b) \leftarrow$ (4a)
   $C(b), A(b) \leftarrow$ (4b)
5. We bekijken de negatie van 5:
   $\neg (E(a) \rightarrow \neg \exists z (P(a,z) \wedge D(z)))$
   $E(a) \wedge \exists z (P(a,z) \wedge D(z)))$
   $E(a) \wedge (P(a,c) \wedge D(c)))$ (Nieuwe constante c)
   Als clausule:
   $E(a) \leftarrow$ (5a)
   $P(a,c) \leftarrow$ (5b)
   $D(c) \leftarrow$ (5c)

Merk op: we hebben geen skolem functies nodig gehad.
De resolutie afleiding:

6.	$C(b), B(b) \leftarrow$	[1,4b]
7.	$\leftarrow P(x,y), C(y), P(x,c)$	[2,5c]
8.	$\leftarrow P(a,y), C(y)$	[7,5b]
9.	$B(b) \leftarrow P(a,b)$	[6,8]
10.	$B(b) \leftarrow$	[4a,9]
11.	$\leftarrow E(x), P(x,b)$	[3,10]
12.	$\leftarrow E(a)$	[4a,11]
13.	$\leftarrow$	[5a,12]

2

Programma:
1. $Min(x, 0, x)$
2. $Min(s(x), s(y), z) \leftarrow Min(x, y, z)$

(a) Goal: $\leftarrow Min(s(s(0)), y, z)$.
1. Pas regel 1 toe met [2/x, 0/y, 2/z].
2. Pas regel 2 toe met $[1/x_2, s(y_2)/y]$. Nieuw doel: $\leftarrow Min(1, y_2, z)$.
2a. Pas regel 1 toe met $[1/x, 0/y_2, 1/z]$. Samenstellen levert: $[1/y, 1/z]$.
2b. Pas regel 2 toe met $[0/x_3, s(y_2)/y_3]$. Nieuw doel: $\leftarrow Min(0, y_3, z)$.
Nu is alleen regel 1 van toepassing met $[0/x]$. Samenstellen levert: $[2/y, 0/z]$.
[Je kunt de stapjes boven ook in een boom weergeven.]
We hebben nu alle mogelijkheden gehad.

(b) Het Herbrand universum is $\{0, s0, ss0, sss0, ...\}$, dit is isomorf met de natuurlijke getallen.

(c) De interpretatie van Min in het kleinste Herbrand model M is:

$$\{(n, m, k) \in N^3 \mid n - m = k\}.$$

Om in te zien dat dit ook echt het kleinste is nemen we aan dat $M \models Min(n, m, k)$, dat wil zeggen: $n - m = k$. We bewijzen nu $\vdash_{SLD} Min(n, m, k)$:
Pas eerst m keer regel 2 toe, dan krijgen we als doel: $Min(n - m, 0, k)$.
Dit kunnen we bewijzen met regel 1.
Dus alle ware uitspraken in M zijn bewijsbaar met SLD-resolutie. Gevolg: M is het *kleinste* Herband model.

Een ander model krijgen we door Min altijd waar te maken: $Min = N^3$.

3

1. Zo'n machine geeft een algorithme om bewijsbaarheid in PA te beslissen. Dat kan niet.
2. Deze machine bestaat, want $\{\ulcorner\varphi\urcorner \mid PA \vdash \varphi\}$ is recursief opsombaar.
3. Deze machine is niet volledig gespecificeerd, bijvoorbeeld op de Gödel zin.
4. Deze machine bestaat niet, want $Th(N)$ is niet recursief opsombaar.