Je draai vinden in een grote groep

Rubik's Cube & Wiskunde

Prof.dr. Marko van Eekelen

Radboud Universiteit

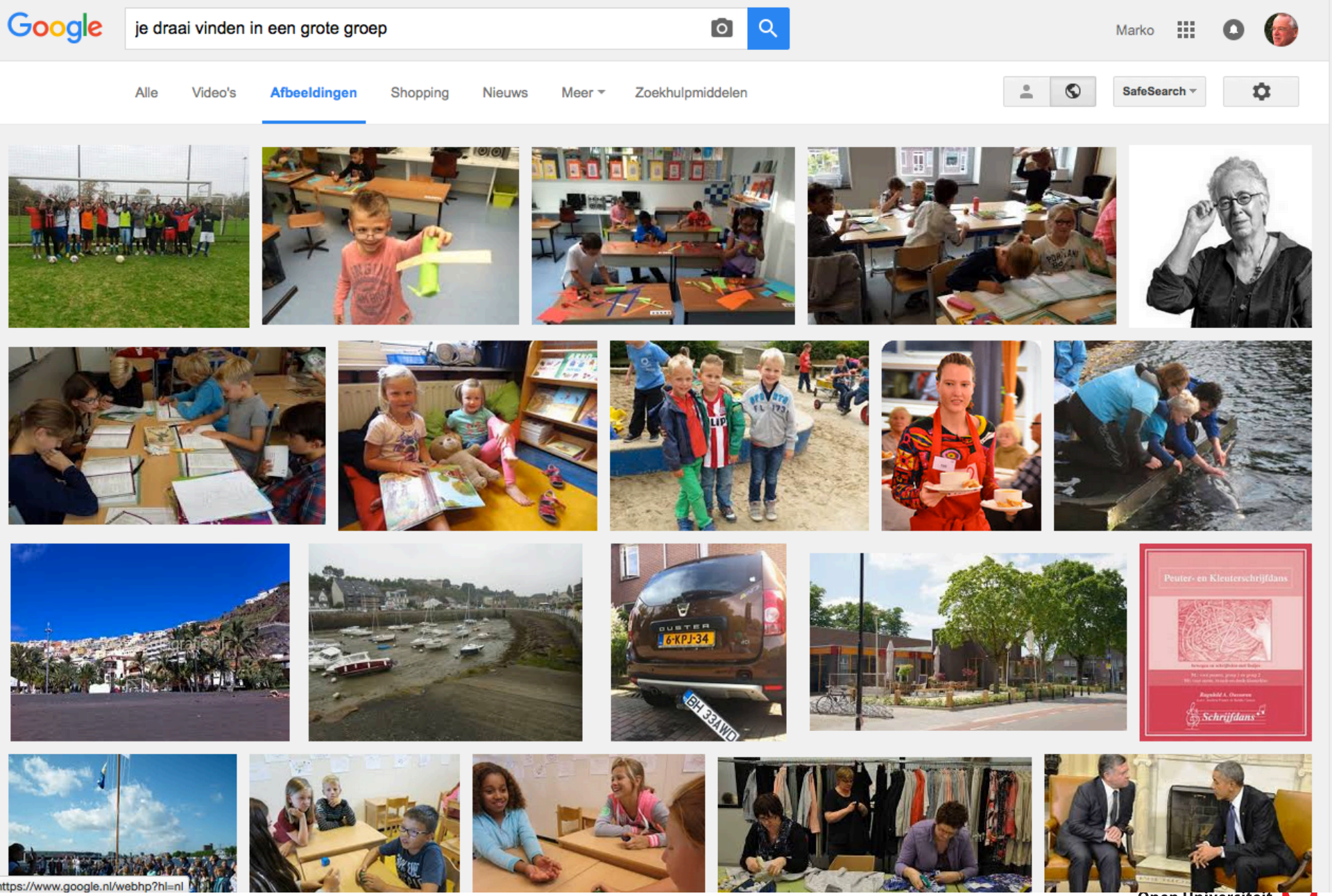
Open Universiteit
www.ou.nl

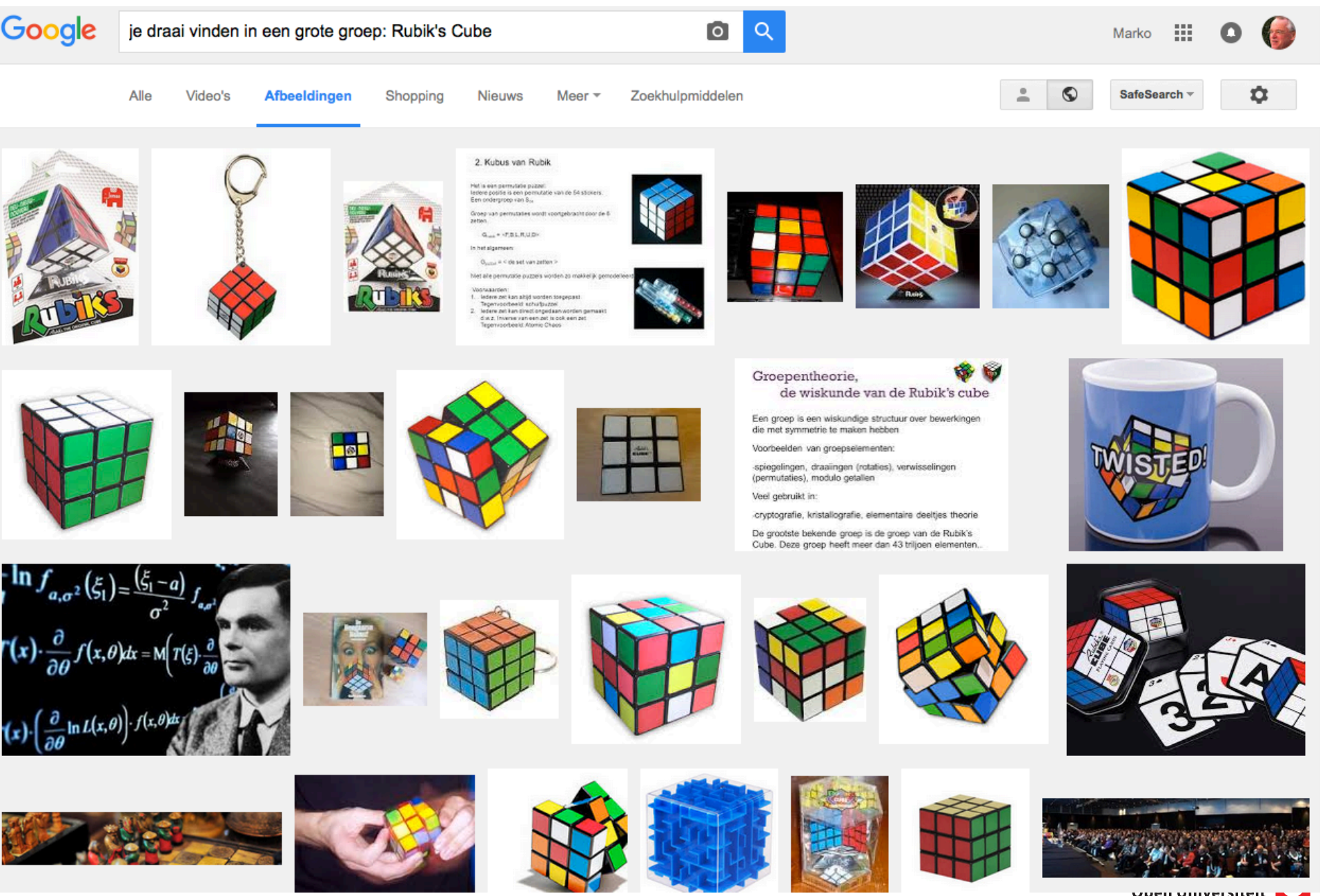
Who's that guy?

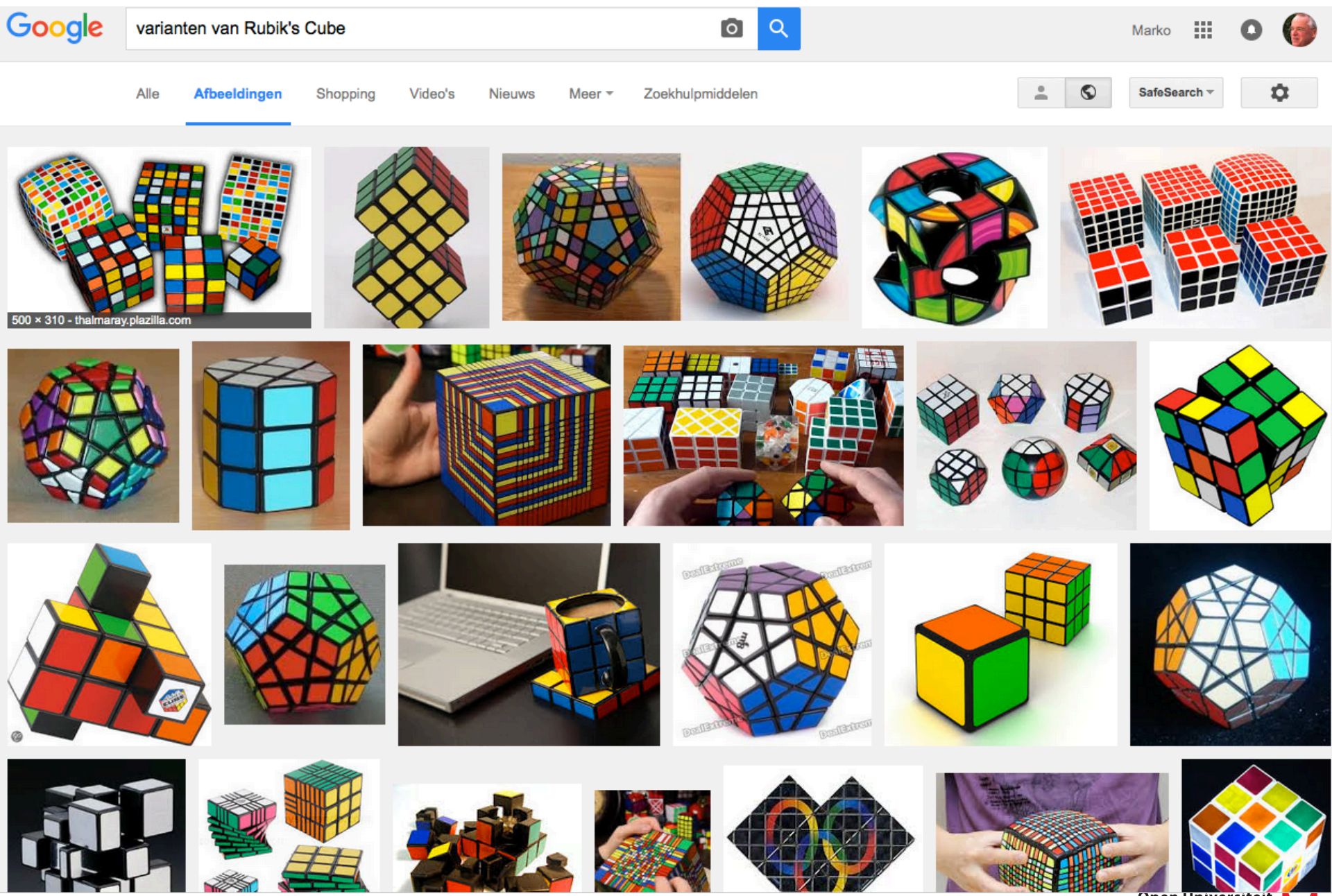
Marko van Eekelen, marko.vaneekelen@ou.nl, marko@cs.ru.nl

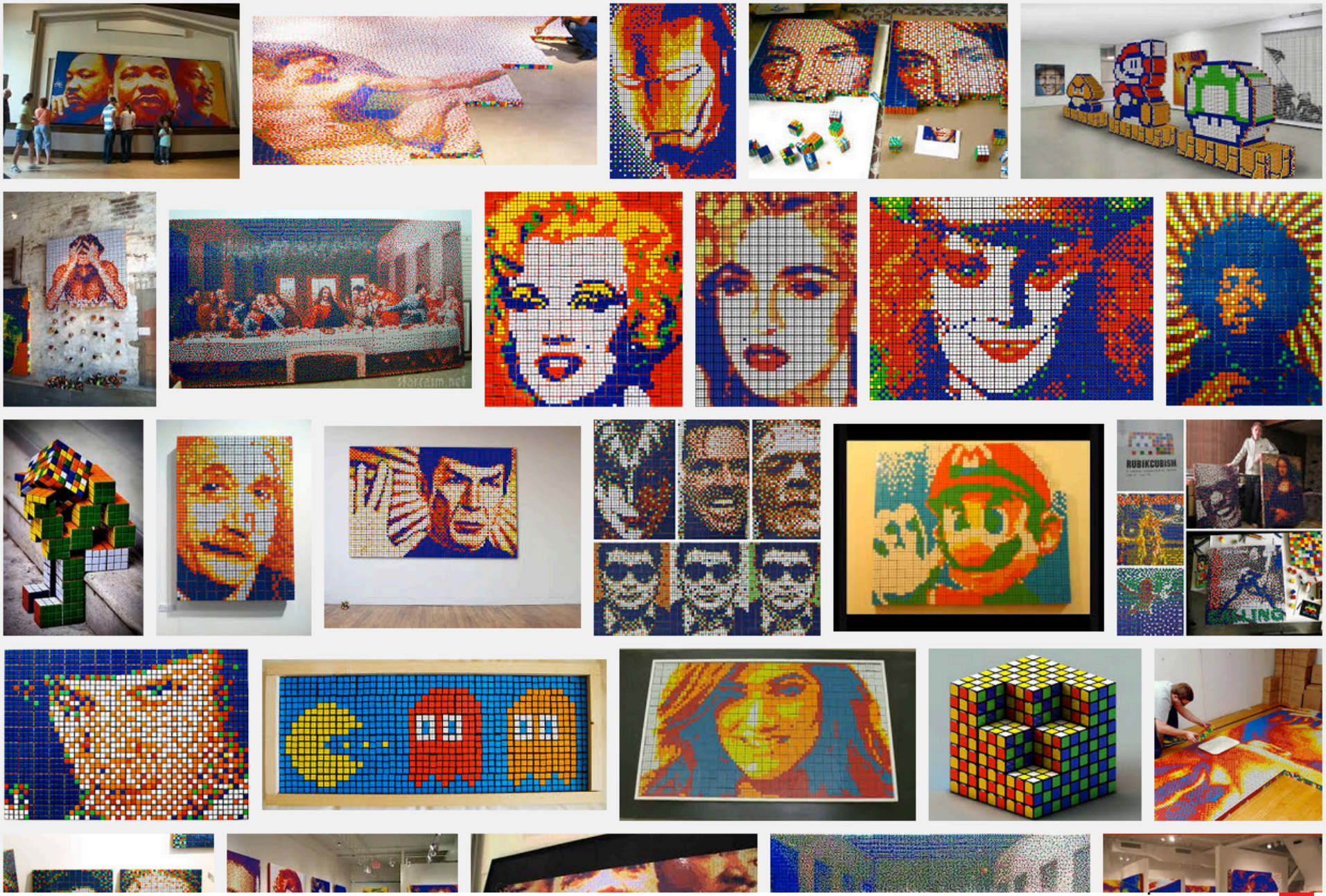
- 1981: Afgestudeerd als student KUN-Wiskunde
- 2015: Nu hoogleraar Software Technologie,
  - Open Universiteit Nederland, Voorzitter vakgroep Informatica
    & Radboud Universiteit, Digital Security groep
- Onderzoek: analyse van IT met wiskundige methoden
  - correctheid, security en energieverbruikanalyse
    - Maeslantkering
    - Slimme meters
    - 2016-2020 Sovereign project
      - Verificatie van safety-critical software
      - Rijkswaterstaat, Nuclear Research Group
      - met Herman Geuvers, Freek Wiedijk, Sjaak Smetsers, …

- Maar vandaag gaat het over een andere, oude hobby van mij …


Google
je draai vinden in een grote groep
Marko
Alle
Video's
Afbeeldingen
Shopping
Nieuws
Meer
Zoekhulpmiddelen
SafeSearch
6-KPJ-34
BH 33AWD
Peuter- en Kleuterschrijfdans
Schrijfdans
https://www.google.nl/webhp?hl=nl


Google
je draai vinden in een grote groep: Rubik's Cube
Marko
Alle
Video's
Afbeeldingen
Shopping
Nieuws
Meer
Zoekhulpmiddelen
SafeSearch
2. Kubus van Rubik
Groepentheorie,
de wiskunde van de Rubik's cube
Een groep is een wiskundige structuur over bewerkingen die met symmetrie te maken hebben
Voorbeelden van groepselementen:
-spiegelingen, draaiingen (rotaties), verwisselingen (permutaties), modulo getallen
Veel gebruikt in:
-cryptografie, kristallografie, elementaire deeltjes theorie
De grootste bekende groep is de groep van de Rubik's Cube. Deze groep heeft meer dan 43 triljoen elementen.
TWISTED!


Google
varianten van Rubik's Cube
Marko
Alle
Afbeeldingen
Shopping
Video's
Nieuws
Meer
Zoekhulpmiddelen
SafeSearch
500 × 310 - thalmaray.plazilla.com


RUBIKCUBISM

Geschiedenis

Ernö Rubik, Department of Interior Design,

Academy of Applied Arts and Crafts, Boedapest

- Magic Cube, eerste idee 1974, patent 1975, eerste exemplaren 1977
- Rubiks Cube, eerste industrieel export uit Hongarije, mei 1980
- 1981, David Singmaster's Cube Notes
- 1981, Scientific American, D. Hofstadter
- 1981, Museum of modern art, New York
- 1981, Nederlandse Kubus Club (NKC)
- 1982, Oxford English Dictionary
- 1980-1982: 100 miljoen exemplaren verkocht; t/m 2008: 350 miljoen

Ook in Nederland was het dé hit van 1981!

De kubus komt al snel in beeld als het gaat om het jaar 1981..

- Triviant (TROS), Het gevoel van … (KRO), De tijd van ons leven (KRO), De televisiejaren (NCRV)

Wat is er zo spannend aan?

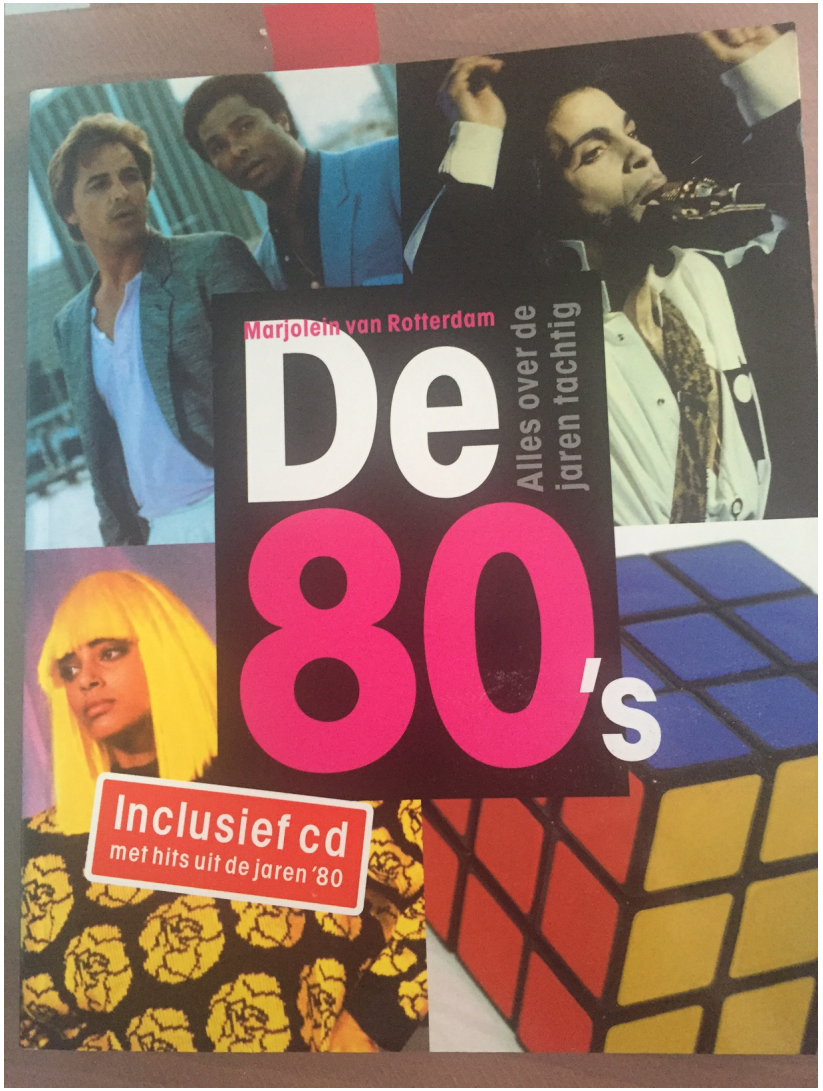

- Leuke kleurtjes
- Lijkt eenvoudig: beetje draaien
- Binnen de kortste keren zit ie totaal in de war en kom je er niet makkelijk verder mee omdat je het effect van het draaien niet meer overziet
- Maar als je goed kijkt, logisch nadenkt en gericht op zoek gaat naar manieren om kleine veranderingen te creëren, dan komt het goed.
- Als je het kunt, zijn anderen onder de indruk
- Je hebt dan wat om handen..
- En je kunt jezelf blijven verbeteren,
  - Mooie figuren, minder slagen, sneller, met je ogen dicht, met je voeten, achter je rug, en zelfs jonglerend…

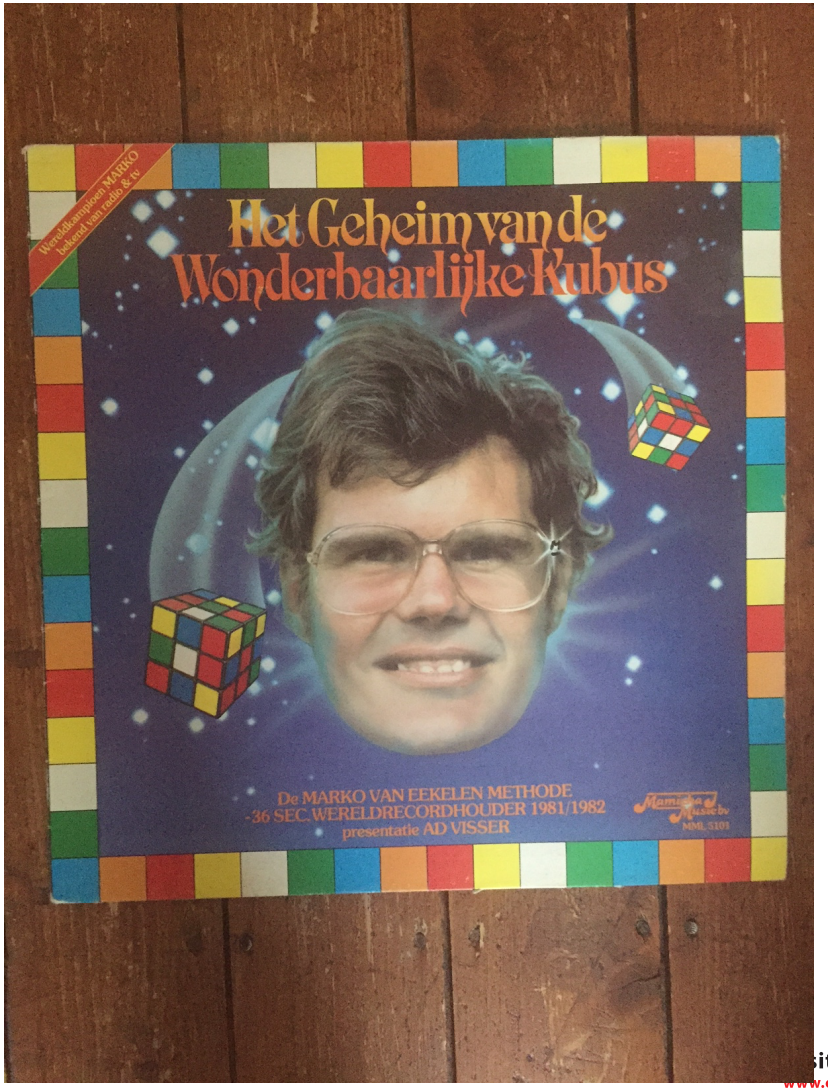
Mijn persoonlijke ervaringen


- een weekend in oktober, een vakantie in december 1980, en daarna een aantal maanden erg fanatiek…
- 2e bij het 1e open Draaikubuskampioenschap van Zuid-Holland, 11 juli 1981
- 1e bij "De Eerste de Beste" en wereldrecord in het Guinness Book of Records (35.48 seconden), 21 aug 1981
  - De huidige recordhouder lost de kubus op in minder dan 10 seconden gemiddeld!
  - Het wereldrecord staat nu op 4.904 seconden (hyperlink)…. voor mensen en
    - iets meer dan 1 seconde (hyperlink) voor IT gestuurde apparaten
- 1e bij de Open Nederlandse Kubus Kampioenschappen, 28 aug 1981
- TV: De eerste de beste (TROS), TV-verslag van Radiokampioenschap (KRO), MIES (AVRO)

Open Universiteit
www.ou.nl

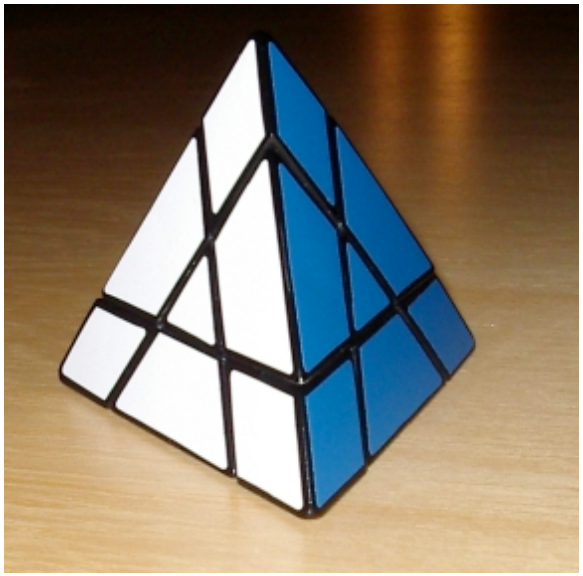
Kubusgekte


Marjolein van Rotterdam
De 80's
Alles over de jaren tachtig
Inclusief cd
met hits uit de jaren '80


Het Geheim van de Wonderbaarlijke Kubus
De MARKO VAN EEKELEN METHODE
-36 SEC. WERELDRECORDHOUDER 1981/1982
presentatie AD VISSER

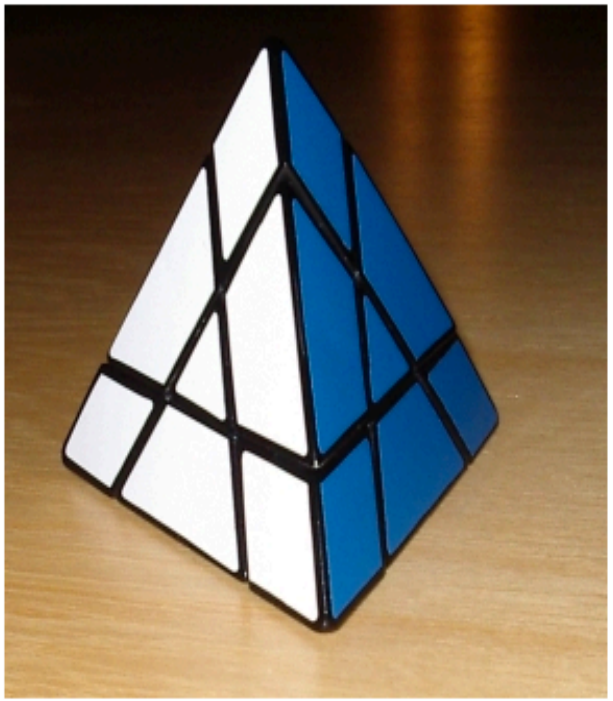
Tetraeder

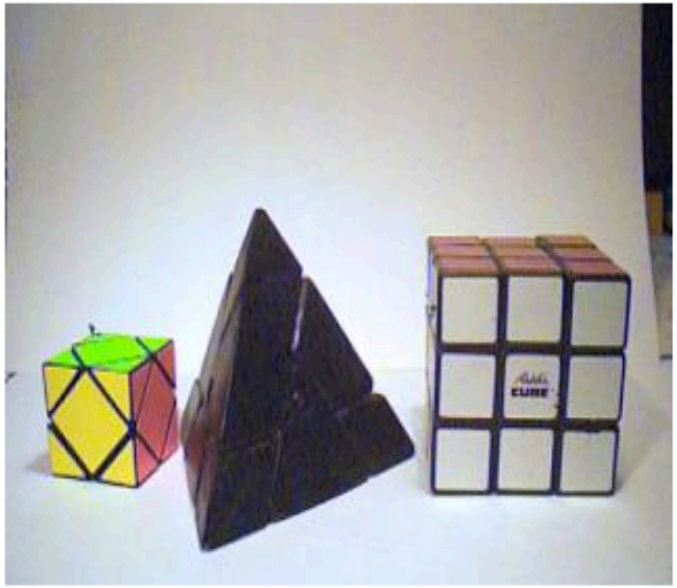
- Afstudeerscriptie Wiskunde 1981
- Samen met Bernard van Houtum
- Op papier uitgezocht
  - aantal standen (3.732.480)
  - oplossingsmethode
  - ordes (max 90), aantal standen per orde
  - karakterisatie van de groepsstructuur
  - gebruik makend van duale karakter
- Geen fysieke vorm en geen computersimulatie
- Geen Patent….



Net geen patent…

Halpern-Meier Pyramid





The Magic Tetrahedron was independently invented by four inventors, Benjamin R Halpern , Kersten Meier and Marko van Eekelen together with Bernard van Houtum . The Magic Tetrahedron is also know as the Halpern-Meier Pyramid. Marko van Eekelen & Bernard van Houtum wrote a paper for there graduation in September 1981, its describes drawings and solutions and mathematical description of the puzzle.

Groepentheorie, de wiskunde van de Rubik's cube

Een groep is een wiskundige structuur over objecten en bewerkingen daarop

Voorbeelden van groepselementen:

- Symmetrieën, spiegelingen, draaiingen (rotaties), verwisselingen (permutaties), modulo rekenen, getallen optellen

Groepentheorie wordt gebruikt in:

- Quantummechanica, cryptografie, kristallografie, …

De groep van de Rubik's Cube is heel groot. Deze groep heeft meer dan 43 triljoen elementen: 43.252.003.274.489.856.000.

Groepen (wiskundige definitie)

Zij G een verzameling met een afbeelding (de groepsoperatie)

$* : G \times G \times G$

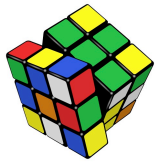
$(g1,g2) \rightarrow g1 * g2$

Dan is G een groep met als groepsoperatie * d.e.s.d.a.

1. G is gesloten onder * $\forall\, g, h \in G\ [\, g * h \in G\,]$
2. * is associatief $\forall\, g,h,k \in G\ [\, (\, g * h) * k = g * (h * k)\,]$
3. Er is een eenheidselement (Identiteit) $\exists\, Id \in G\ \forall\, g \in G\ [\, Id * g = g * Id = g\,]$
4. Elk element heeft een inverse $\forall\, g \in g\ \exists\, g^{-1} \in G\ [\, g * g^{-1} = g^{-1} * g = Id\,]$

Een groep kan eindig veel elementen of oneindig veel elementen hebben

Rubik's groep




R (Right),L (Left),U (Up),D (Down),F (Front),B (Back) zijn draaiingen (met de klok mee als je er tegen aan kijkt)

Dan is Rubik's groep, de eindige groep van alle elementen gegenereerd door combinaties van {R,L,U,D,F,B}

De groepsoperatie is dan het samenstellen van (reeksen) draaiingen aan de kubus

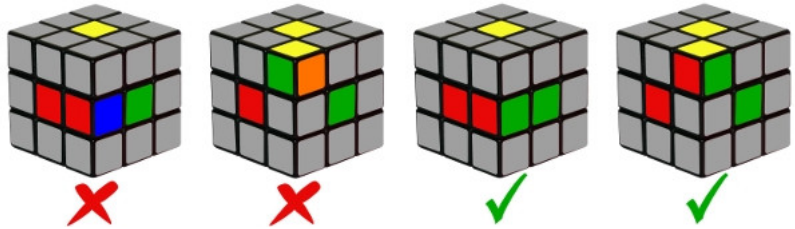
- draaiingen vormen een reeks die je in de tijd na elkaar uit kunt voeren = *associatief*
- *eenheidselement* = beginstand, geen actie uitvoeren
- vinden van een *inverse* = oplossen van een in de war gedraaide kubus

- reeks draaiingen = effect op beginstand = bepaalde stand van de kubus
  - een aantal verwisselingen en draaiingen van blokjes

Even wat notatie

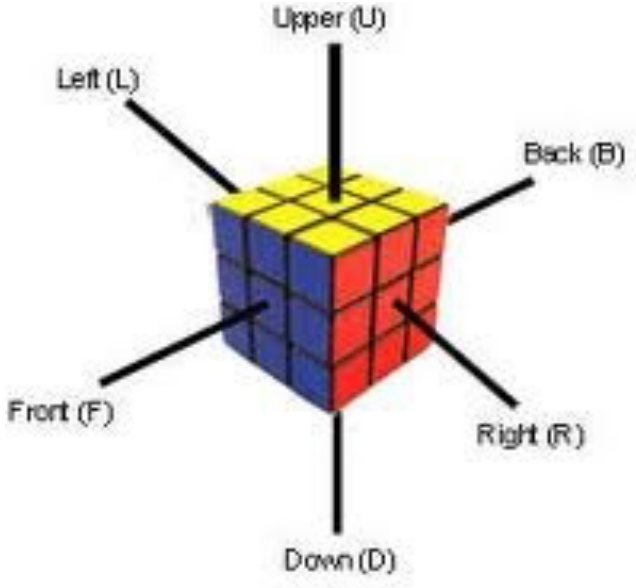

Eerste observatie:

- alles draait om de centra van de vlakken
- de centra veranderen niet ten opzichte van elkaar
- elk blokje heeft een eigen positie ten opzichte van de centra



Notatie van de draaiingen:

- Met de klok mee (als je tegen het desbetreffende centrum aankijkt)
  - **U (up), D (down), L (left), R (right), F (front), B (back)**
- Tegen de klok in:
  - **U',D',L',R',F',B'**
- Halve slagen:
  - **U^2,D^2,L^2,R^2,F^2,B^2**
- Slices (schijven):
  - **RL', R'L, FB', …**



Een uitstapje naar slices


- Slices (schijven):
  - **R L’**, **R’ L**, **F B’**, …
  - Slices draaien is aan twee tegenoverliggende kanten voor je gevoel hetzelfde doen)
- **RL’** is hetzelfde als de middelste schijf naar voren draaien (aan beide kanten van je af)
  - speedcubers doen dit met 1 vinger met een gesmeerde kubus
- Slices vormen een deelgroep
  - Met slices alleen kun je al mooie figuren maken
  - **RL’ FB’ UD’ RL’** bijvoorbeeld levert:

Groepen (inverse)

Inverse = het omgekeerde effect

Het oplossen van de kubus komt dus eigenlijk neer op het vinden van een methode om een inverse te construeren voor een willekeurig element

Stel dat je weet welke draaiingen er geweest zijn, dan is de inverse

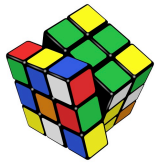
- dezelfde reeks draaiingen, in omgekeerde volgorde, elk de andere kant op draaiend
- OF een andere reeks die hetzelfde effect heeft….

Een notatievoorbeeld:

- **$U^{-1} = U'$ want $U\,U' = U'\,U = Id$**
- **$(U^2)^{-1} = U^2$ want $U^2\,U^2 = Id$**
- **$(L\,U)^{-1} \neq L'\,U'$ want $L\,U\,L'\,U' \neq Id$**
- **$(LU)^{-1} = U'\,L'$ want $L\,U\,U'\,L' = L\,Id\,L' = L\,L' = Id$**

Open Universiteit
www.ou.nl

Groepen (commuteren)




Commuteren = wisselen t.o.v. elkaar

- Twee elementen g en h commuteren desda g * h = h * g
- De commutator van g en h is

  $g * h * g^{-1} * h^{-1}$ (*geeft min of meer aan waarin ze niet commuteren*)

Als voor **alle** elementen van een groep geldt dat g * h = h * g dan heet de groep *commutatief* of *abels*.
Je kunt dan de volgorde van de elementen van de groep omdraaien zonder dat er iets verandert

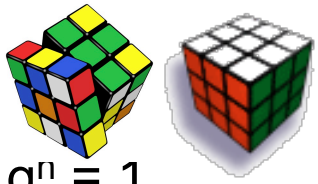
- Optellen van getallen commuteert maar delen niet.
- Elk groepselement commuteert met zijn inverse

De groep van Rubik is niet abels.

- **L U ≠ U L**

Zomaar een commutator in de Rubik groep: **L U L' U'**

Eindige groepen (orde)



- Elk element g uit een groep heeft een orde n waarvoor geldt: $g^n = 1$
  - Als je een reeks draaiingen maar steeds blijft herhalen kom je dus altijd weer bij de beginstand uit!
  - De orde van een element is altijd een deler van het aantal elementen van de groep
- Orde van Rubik's groep
  - 8 hoekblokjes, in drie standen elk; 12 randblokjes in 2 standen elk
  - Met invarianten kan bewezen worden dat
    - randblokjes met twee tegelijk draaien,
    - hoekblokjes met drie tegelijk draaien (of met twee maar dan tegengesteld),
    - als je twee hoekblokjes verwisselt van plaats, verwisselen er ook twee randblokjes mee
    - De groep heeft dus $(8!*3^8*12!*2^{12})/(2*3*2) = 43.252.003.274.489.856.000$ elementen
- Voorbeelden van ordes van elementen:
  - De orde van **U** is 4 want $\mathbf{U^4 = UUUU = Id}$
  - De orde van $\mathbf{U^2}$ is 2 want $\mathbf{(U^2)^2 = U^2U^2 = UUUU = Id}$
- Er is geen element van orde 13; Max orde is 1260 (bv. **R U² D' B D'**)

Groepen (conjugeren)


Conjugeren (verbinden met, koppelen met)

- De geconjugeerde van g door h is $h * g * h^{-1}$
- Alle geconjugeerden van g vormen samen een equivalentieklasse (*in zekere zin hebben ze allemaal hetzelfde effect*)

Conjugeren in de Rubik's groep is handig als je een basis operatie hebt die weinig aan de kubus verandert. Die operatie voer je ergens anders uit door te conjugeren.

Bekijk in de Rubik groep $\mathbf{(L^2\,U^2)^3 = L^2\,U^2\,L^2\,U^2\,L^2\,U^2}$

- $\mathbf{(L^2\,U^2)^3}$ verwisselt gelijktijdig twee randblokjes in het linkervlak (middelste laag) en in het bovenvlak (voor-achter). Dit kun je uitvoeren met de Singmaster greep: dan houd je de blokjes die verwisselen, vast tijdens het draaien.

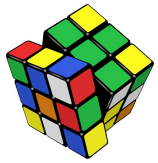
Als je nu bijvoorbeeld gelijktijdig twee randblokjes in het linkervlak (middelste laag) gelijktijdig wilt verwisselen met in het bovenvlak niet (voor-achter) maar (links-rechts) dan kun je conjugeren:

- Zet de blokjes van links en rechts uit het bovenvlak zó dat ze voor en achter zitten: **U**
- Voor de conjugatieoperatie uit: $\mathbf{(L^2U^2)^3}$
- Zet de blokjes in het bovenvlak weer terug: **U'**

De door U geconjugeerde van $\mathbf{(L^2U^2)^3}$ is daarmee dus $\mathbf{U(L^2U^2)^3\,U'}$.

Open Universiteit
www.ou.nl

Samenvatting van groepen




- Elk element g uit een eindige groep heeft een *orde* n waarvoor geldt: $g^n = Id$

  n is dan altijd een deler van het aantal elementen van de groep

  Als je een draaireeks consequent blijft herhalen komt de kubus vanzelf weer in de stand waarin je begon (na maximaal 1260 keer)

- Twee elementen g en h *commuteren* desda g * h = h * g
  - De commutator van g en h is

  $g * h * g^{-1} * h^{-1}$ (*geeft min of meer aan waarin ze niet commuteren*)

- De *geconjugeerde* van g door h is $h^{-1} * g * h$

  Alle geconjugeerden van g vormen samen een equivalentieklasse (*ze hebben allemaal een vergelijkbaar effect*)

- De kubus oplossen is het inverteren van wat iemand ermee gedaan heeft.

Zelf vinden van een oplossing?

Combineren, Roteren, Spiegelen, Conjugeren, Commuteren, Inverteren, Orde gebruiken en misschien Demonteren….

De combinatie van de twee commutatoren **R U R' U'** en **U^2 R U^2 R'** verandert alleen iets in het bovenvlak.

Met

R U R' U' U^2 R U^2 R' gecombineerd met diens gespiegelde

L' U' L U U^2 L' U^2 L heb je in het bovenvlak 2 hoeken gedraaid terwijl de rest van de kubus helemaal gelijk blijft

De andere kant op draaien?

- Nog een keer
  - Na drie keer draaien ben je weer bij het begin.
- Alle draaiingen achterstevoren en de andere kant op uitvoeren

Verdraaid? Demonteren!

Wat als je helemaal vast zit?

De kubus kan uit elkaar!

Draai 1 vlak zó dat het precies halverwege staat

Klik met een platte schroevedraaier of beter nog: met de achterkant van een lepeltje een randblokje eruit.

Peuter vervolgens een voor een de blokjes er tussen uit.

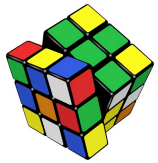
Je houdt een karkas met alleen de centra over

Zet alles er op de juiste plaats (!) weer terug in.

Klik als laatste het randblokje er met de hand weer in

Pas op: doe dit niet te vaak. Hij slijt er wel een beetje van.

Centrum van een groep

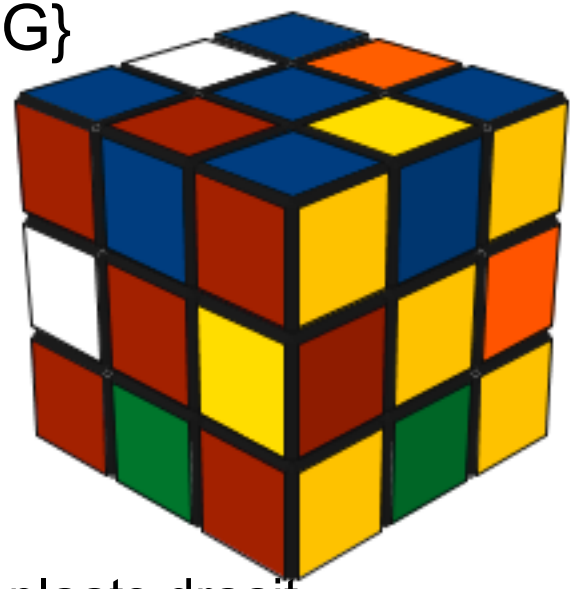



Het centrum van een groep G is de subgroep

Centrum(G) die bestaat uit die elementen van G die

met alle elementen van G commuteren m.a.w:

$$\text{Centrum}(G) = \{ z \in G \mid z * g = g * z, \forall\, g \in G\}$$



Een viertal eigenschappen:

1. $z \in \text{Centrum}\ (G) \Leftrightarrow \forall\ g \in G\ [\ g * z * g^{-1} = z\ ]$
2. $\forall G\ [\text{Id} \in \text{Centrum}(G)]$
3. $\text{Centrum}\ (G) = G \Leftrightarrow$ G is commutatief
4. $\text{Centrum}\ (\text{Rubik}) = \{\text{Id}, \text{Superflip}\}$

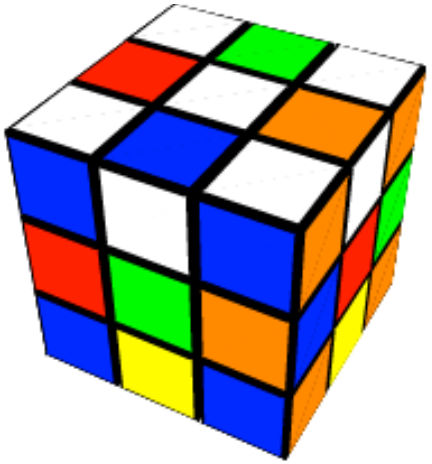
Superflip = de operatie die elk randblokje op zijn eigen plaats draait

$R\ L\ U^2\ F\ U'\ D\ F^2\ R^2\ B^2\ L\ U^2\ F'\ B'\ U\ R^2\ D\ F^2\ U\ R^2\ U$

Diameter van de groep (GOD's Number)

- Diameter is de langste afstand die je eventueel af zou moeten leggen als je altijd de kortste weg zou weten
  - met het algoritme van een alwetende god…..

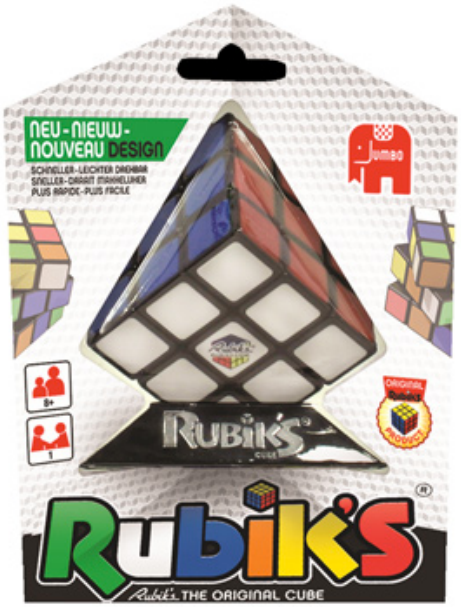
- 1980-1981 Diameter tussen 18 en 52
  - David Singmaster, ondergrens 18 (kwartslagen)
  - Morwen Thistlethwaite, bovengrens 52
    - Door subgroepen heen met steeds meer halve slagen
- 2010
  - Diameter = 20 (met kwart en halve slagen)
  - Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson, and John Dethridge
  - 300 miljoen verste standen: bv. de superflip.
- 2014 Tomas Rokicki, Morley Davidson
  - Diameter = 26 (alleen kwartslagen)
  - 29 jaar CPU-tijd, Ohio Supercomputing Centre
  - 1 verste stand: superflip met 4-spot




Wiskunde en de groep van Rubik's cube

- Het is een voorbeeld van een hele grote groep
- Je kunt er je hele leven lang mee blijven spelen
- Als je genoeg van de kubus hebt, zijn er nog heel veel varianten
- In 26 kwartslagen is het theoretisch altijd te doen om de kubus weer goed te krijgen
- Als je een draaireeks steeds maar herhaalt, komt alles altijd weer in orde (na maximaal 1260 keer)
- Met conjugeren en commuteren kun je leren inverteren
- Wiskunde helpt…. (niet alleen bij de Rubik's cube)

Jumbo Rubik's Kubus Nieuw



Zelf aan de slag?

Met dank aan Jumbo!