Opgaven bij Hoofdstuk 2 - Logica en Resolutie

Opgave 1

a. Bewijs met behulp van waarheidstafels dat de volgende propositie

$$P \to (Q \to (P \wedge Q))$$

een tautologie is.

b. Eén van de equivalentiewetten in de eerste-orde predikatenlogica is

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

Er geldt echter *niet* dat

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

Bewijs dit aan de hand van een tegenvoorbeeld.

c. Beschouw de volgende formule in de eerste-orde predikatenlogica:

$$F = \forall x \exists y (P(f(x), y) \vee \neg Q(x))$$

Stel dat de volgende structuur S gegeven is:

$$S = \langle D = \{a, b\}, \{g : D \to D\}, \{R : D^2 \to \{true, false\}, S : D \to \{true, false\}\}\rangle$$

waarbij de functie g als volgt gedefinieerd is: $g(a) = a$, en $g(b) = b$; voorts zijn de predikaten R en S als volgt gedefinieerd: $R(a, a) = true$, $R(a, b) = false$, $R(b, b) = true$, $R(b, a) = false$, $S(a) = true$, en $S(b) = false$. De functie g wordt geassocieerd met het functiesymbool f, en de predikaten R en S met de respectievelijke predikaatsymbolen P en Q. Wat is de waarheidswaarde van de formule F in de gegeven structuur S? Geef een toelichting op uw antwoord.

d. Beschouw de volgende formule in de eerste-orde predikatenlogica:

$$F = \exists x (P(a, x) \vee \forall y (Q(x, y) \wedge \exists z R(z)))$$

Zet deze formule om naar clausal form. Stel dat we de resulterende verzameling clauses aangeven met F'. Geldt voor F en F' dat $F \equiv F'$? Geef een toelichting.

Opgave 2

a. De wijze waarop met behulp van resolutie een refutatie van een inconsistente verzameling clauses S wordt gegenereerd, kan worden geïllustreerd met behulp van een refutatieboom $T = (V(T), E(T))$. In een refutatieboom T worden de knopen voorzien van een clause als etiket. In het geval van binaire resolutie heeft de refutatieboom die verkregen wordt de vorm van een binaire boom. (Bij andere resolutievormen is de refutatieboom niet altijd binair.) Beschouw de volgende verzameling clauses:

$$
\begin{aligned}
S = \{&P(x, g(x)),\\
&\neg P(a, g(a)) \lor Q(f(x, y), g(y)) \lor \neg R(x, y),\\
&R(c, a),\\
&\neg Q(f(c, x), g(a))\}
\end{aligned}
$$

Construeer een refutatieboom voor deze inconsistente verzameling clauses met gebruikmaking van binaire resolutie.

b. Beschouw de volgende twee atomen in eerste-orde predikatenlogica:

$$
\begin{aligned}
&P(x, f(x))\\
&P(g(y), y)
\end{aligned}
$$

Zijn deze twee atomen unificeerbaar? Geef hiervoor een verklaring.

c. Zij gegeven de volgende formule in eerste-orde predikaten logica:

$$\forall x(\neg Q(x, g(a)) \land P(x, g(x)) \land \forall y(P(a, g(a)) \to Q(x, g(y))))$$

Zet deze formule in een aantal stappen om in de clausal form of logic. Laat met behulp van binaire resolutie zien dat de verkregen verzameling clauses inconsistent is.

d. Beschouw de volgende verzameling clauses S

$$
\begin{aligned}
S = \{&\neg P(x, f(y)) \lor \neg Q(y, a) \lor R(x),\\
&Q(g(b), w) \lor S(d),\\
&P(c, u),\\
&\neg R(v) \lor S(d),\\
&\neg S(z)\}
\end{aligned}
$$

waarin x, y, z, u, v, w universeel gekwantificeerde variabelen voorstellen, en a, b, c, d constanten. Bewijs met behulp van binaire resolutie dat de verzameling clauses S inconsistent is.

e. In een anatomisch-redenerend expertsysteem is het noodzakelijk de ruimtelijke structuur van organen te specificeren. Voor de representatie van de anatomie van een zenuwvezel zou bijvoorbeeld gebruik gemaakt kunnen worden van een binair predikaatsymbool *Verbinding*, waarbij $Verbinding(x, y)$ waar is als de plaatsen x en y via de zenuw met elkaar in verbinding staan. We nemen aan dat de volgorde van de argumenten belangrijk is; dus als x in verbinding staat met y hoeft y niet in verbinding te staan met x. Formuleer nu een aantal formules in eerste-orde predikatenlogica die de eigenschappen van het predikaatsymbool *Verbinding* tot uitdrukking brengen.

Opgave 3

a. Geef twee tegenvoorbeelden waaruit blijkt dat de compositie van substituties niet noodzakelijk commutatief en idempotent is. Aan welke voorwaarden moet een substitutie voldoen om wel idempotent te zijn?

b. Beschouw de volgende expressies:

$$E = \{g(f(a), h(x, y)), g(y, h(i(b), z))\}$$

waarin x, y en z variabelen voorstellen. Onderzoek of deze expressies unificeerbaar zijn. Indien dit het geval is, geef dan de most general unifier; anders verklaar waarom de expressies niet unificeerbaar zijn. Laat zien hoe u aan uw antwoord bent gekomen.

c. Beschouw de volgende zinnen:

> "De douane van de Verenigde Staten onderzoekt elke persoon die het land wil bezoeken, en geen VIP is. Drug dealers worden niet toegelaten. Enkele drug dealers kwamen toch de Verenigde Staten binnen. Drug dealers zijn corrupt. Iedereen die in contact komt met een drug dealer is corrupt. De douane is niet corrupt."

Onderzoek met behulp van resolutie hoe de drug dealers de Verenigde staten zijn binnengekomen. Gebruik de volgende afkortingen bij de omzetting naar logica:

- $B(x)$: x is een een douane-beambte;
- $D(x)$: x is een drug dealer;
- $V(x)$: x is een VIP;
- $C(x)$: x is corrupt;
- $T(x)$: x wordt toegelaten tot de V.S.;
- $S(x, y)$: x wordt onderzocht door y.