Redeneren met onzekerheid II

Onderwerpen:

- Redeneren met Bayesiaanse netwerken
- Terug naar onzekerheid geassocieerd met regels:
  - Wat zijn nu de echte veronderstellingen?
  - Wat zijn de beperkingen?
- Relatie met moderne Bayesiaanse netwerktheorie
- Integratie van netwerkmodellen en logica (Markov logica)

Probabilistisch redeneren

- Wij zijn geïnteresseerd in conditionele kansverdelingen:

$$P(X_i \mid \mathcal{E}) = P^{\mathcal{E}}(X_i)$$

voor (mogelijk lege) aanwijzingen (evidence) $\mathcal{E}$

Voorbeelden

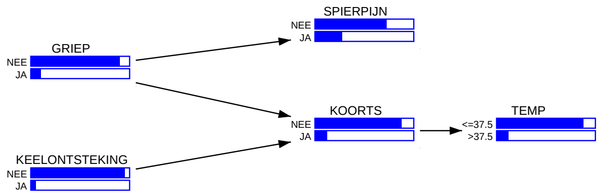
$$P(\mathrm{GRIEP} = \textit{ja} \mid \mathrm{TEMP} < 37.5)$$

$$P(\mathrm{GRIEP} = \textit{ja} \mid \mathrm{SPIERPIJN} = \textit{ja}, \mathrm{TEMP} < 37.5)$$

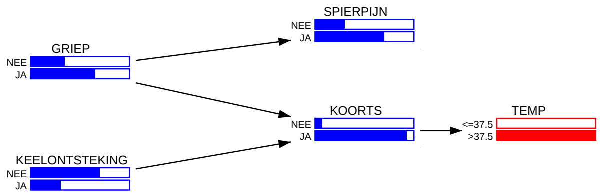
- Meestal (marginale) kansverdelingen van enkelvoudige variabelen

Inferentie: propagatie van aanwijzingen

- Niets bekend:



- Temperatuur > 37.5 graden Celcius:



Probabilistisch redeneren

- Samengestelde kansverdeling $P(V)$:

$$P(V) = P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

  - marginalisatie:

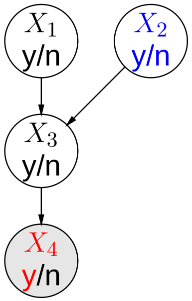
$$P(W) = \sum_{V \setminus W} P(V) = \sum_{V \setminus W} \prod_{X \in V} P(X \mid \pi(X))$$

  - conditionele kansen en de regel van Bayes:

$$P(Y, Z \mid X) = \frac{P(X \mid Y, Z)P(Y, Z)}{P(X)}$$

- Vele efficiënte algoritmen bestaan

Naïef probabilistisch redeneren

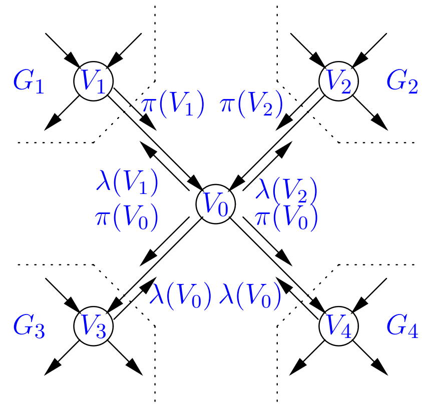


$\Pr(x_4 \mid x_3) = 0.4$
$\Pr(x_4 \mid \neg x_3) = 0.1$
$\Pr(x_3 \mid x_1, x_2) = 0.3$
$\Pr(x_3 \mid \neg x_1, x_2) = 0.5$
$\Pr(x_3 \mid x_1, \neg x_2) = 0.7$
$\Pr(x_3 \mid \neg x_1, \neg x_2) = 0.9$
$\Pr(x_1) = 0.6$
$\Pr(x_2) = 0.2$

$P^{\mathcal{E}}(x_2) = P(x_2 \mid x_4) = \frac{P(x_4|x_2)P(x_2)}{P(x_4)}$ (regel van Bayes)

$$= \frac{\sum_{X_3} P(x_4|X_3) \sum_{X_1} P(X_3|X_1, x_2) P(X_1) P(x_2)}{\sum_{X_3} P(x_4 \mid X_3) \sum_{X_1, X_2} P(X_3 \mid X_1, X_2) P(X_1) P(X_2)} \approx 0.14$$

Judea Pearl's algorithme



- Object-georiënteerd: knopen zijn objecten die locale informatie bevatten en locale berekeningen uitvoeren
- Updating via message passing: pijlen zijn communicatiekanalen

Terug naar regels

- Kies een geschikte theorie
- Vind een invulling voor de combinatiefuncties f_{and}, f_{or}, f_{prop}, f_{co}
- Implementeer de combinatiefuncties als onderdeel van een inference engine

Voorbeelden:

- Certainty-factor model (Mycin)
- Subjectieve Bayesiaanse methode (Prospector)
- Ishizuka's regelgebaseerde vereenvoudiging van Dempster-Shafer theorie

Certainty factor model

- Ontwikkeld door E.H. Shortliffe en B.G. Buchanan voor regelgebaseerde kennissystemen met top-down inferentie
- Model oorspronkelijk gedefinieerd in termen van kansrekening
- Toegepast in MYCIN, en in gemodificeerde vorm in EMYCIN
- Certainty-factors (CF's, zekerheidsfactoren): subjectieve schattingen van onzekerheid
- CF-model biedt invulling van combinatiefuncties: f_{and}, f_{or}, f_{prop}, f_{co}

Uitgangspunten begrip certainty-factor

- Shortliffe & Buchanan: als expert $P(h|e) = x$ schat, met H hypothese en E aanwijzingen, wordt de consequentie $P(\neg h|e) = 1 - x$ vaak niet aanvaard
- Conclusie: laat expert zowel het vertrouwen (belief) als het wantrouwen (disbelief) in een bepaalde hypothese H gegeven bepaalde aanwijzingen E schatten:
  - measure of belief (maat van vertrouwen): $\mathrm{MB}(H, E)$
  - measure of disbelief (maat van wantrouwen): $\mathrm{MD}(H, E)$
- Verklaring (J. Pearl): de expert bedoelt eigenlijk $P(h|e)$ t.o.v. $P(h)$ ($P(\neg h|e)$ t.o.v. $P(\neg h)$): als $P(h|e) > P(h)$, toegenomen vertrouwen

Combinatiefuncties

- f_{prop}: **if** e **then** $h_{\text{CF}(h,e)}$ **fi**

$$e' \xrightarrow{\text{CF}(e,e')} e \xrightarrow{\text{CF}(h,e)} h$$

$$\text{CF}(h, e') = \text{CF}(h, e) \cdot \max\{0, \text{CF}(e, e')\}$$

- f_{and} (of f_{or}): **if** e_1 **and** e_2 **then** $h_{\text{CF}(h,e)}$ **fi**

$$e' \xrightarrow{\text{CF}(e_1,e')} e_1 \qquad e' \xrightarrow{\text{CF}(e_2,e')} e_2$$

$$\text{CF}(e_1 \textbf{ and } e_2, e') = \min\{\text{CF}(e_1, e'), \text{CF}(e_2, e')\}$$
$$\text{CF}(e_1 \textbf{ or } e_2, e') = \max\{\text{CF}(e_1, e'), \text{CF}(e_2, e')\}$$

Combinatiefuncties

- f_{co}: **if** e_1 **then** $h_{\text{CF}(h,e_1)}$ **fi** en **if** e_2 **then** $h_{\text{CF}(h,e_2)}$ **fi**

$$e'_1 \xrightarrow{\text{CF}(h,e'_1)} h \xleftarrow{\text{CF}(h,e'_2)} e'_2$$

$$\text{CF}(h, e'_1 \textbf{ co } e'_2) = \begin{cases} x + y(1-x) & \text{als } x, y > 0 \\ \frac{x+y}{1-\min\{|x|,|y|\}} & \text{als } -1 < xy \leq 0 \\ x + y(1+x) & \text{als } x, y < 0 \end{cases}$$

met $\text{CF}(h, e'_1) = x$ en $\text{CF}(h, e'_2) = y$

Voorbeeld

$\mathcal{R} = \{R_1 : \textbf{if } \textit{flu} \textbf{ then } \textit{fever}_{\text{CF}(\textit{fever},\textit{flu})=0.8} \textbf{ fi},$
$\quad R_2 : \textbf{if } \textit{common-cold} \textbf{ then } \textit{fever}_{\text{CF}(\textit{fever},\textit{common-cold})=0.3} \textbf{ fi}\}$

Feiten: $\text{CF}(\textit{flu}, e') = 0.6$ en $\text{CF}(\textit{common-cold}, e') = 1$

Voor regel R_1:

$$\begin{aligned} \text{CF}(\textit{fever}, e'_1) &= \text{CF}(\textit{fever}, \textit{flu}) \cdot \max\{0, \text{CF}(\textit{flu}, e')\} \\ &= 0.8 \cdot 0.6 = 0.48 \end{aligned}$$

voor regel R_2 wordt $\text{CF}(\textit{fever}, e'_2) = 0.3$ verkregen

Gebruik van f_{co}:

$$\begin{aligned} \text{CF}(\textit{fever}, e'_1 \textbf{co } e'_2) &= \text{CF}(\textit{fever}, e'_1) + \text{CF}(\textit{fever}, e'_2)(1 - \text{CF}(\textit{fever}, e'_1)) \\ &= 0.48 + 0.3(1 - 0.48) = 0.636 \end{aligned}$$

Afbeelding naar Bayesian networks?

- Vind een probabilistische invulling voor:
  - f_{prop} (propagatie):

$$e' \xrightarrow{\text{CF}(e,e')} e \xrightarrow{\text{CF}(h,e)} h$$

  - f_{and} (of f_{or}) (samenstellen):

$$\begin{tikzcd} e' \arrow[r, "\text{CF}(e_1,e')"] & e_1 \arrow[dr, no head] & \\ & & \bullet \\ e' \arrow[r, "\text{CF}(e_2,e')"] & e_2 \arrow[ur, no head] & \end{tikzcd}$$

  - f_{co} (co-concluderen):

$$\begin{tikzcd} e'_1 \arrow[dr, "\text{CF}(h,e'_1)"] & \\ & h \\ e'_2 \arrow[ur, "\text{CF}(h,e'_2)"'] & \end{tikzcd}$$

Propagatie

- f_{prop} (propagatie):

$$e' \xrightarrow{\text{CF}(e,e')} e \xrightarrow{\text{CF}(h,e)} h$$

$$\text{CF}(h,e') = \text{CF}(h,e) \cdot \max\{0, \text{CF}(e,e')\}$$

- corresponderend Bayesian network (met $P(e')$ extra):

$$E' \xrightarrow{P(E \mid E')} E \xrightarrow{P(H \mid E)} H$$

$$P(h \mid e') = P(h \mid e)P(e \mid e') + P(h \mid \neg e)P(\neg e \mid e')$$

$\Rightarrow P(h \mid \neg e) = 0$ (veronderstelling van CF-model)

NB: $P(h \mid e') = P(h \mid e, e')P(e \mid e') + P(h \mid \neg e, e')P(\neg e \mid e')$

Co-concluderen

- f_{co} (co-concluderen):

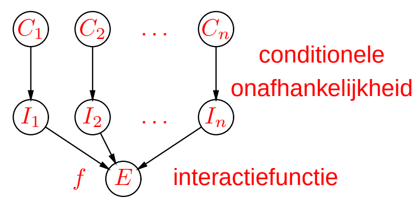
$$\begin{tikzcd} e'_1 \arrow[dr, "\text{CF}(h,e'_1)"] & \\ & h \\ e'_2 \arrow[ur, "\text{CF}(h,e'_2)"'] & \end{tikzcd}$$

- idee: zie dit als onzekere deterministische interactie $\Rightarrow$ causal independence model

$$\begin{tikzcd} E'_1 \arrow[r] & I_1 \arrow[dr] & \\ & & H \\ E'_2 \arrow[r] & I_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

functie
f

Causal Independence

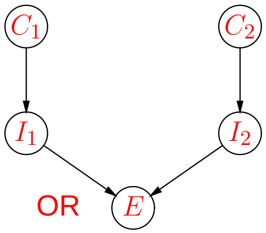


$$P(e \mid C_1, \ldots, C_n) = \sum_{I_1,\ldots,I_n} P(e \mid I_1, \ldots, I_n) \prod_{k=1}^{n} P(I_k \mid C_k)$$

$$= \sum_{f(I_1,\ldots,I_n)=e} \prod_{k=1}^{n} P(I_k \mid C_k)$$

Boolse functies: $P(E \mid I_1, \ldots, I_n) \in \{0,1\}$ met $f(I_1, \ldots, I_n) = 1$ als $P(e \mid I_1, \ldots, I_n) = 1$

Voorbeeld: noisy OR



- Interacties tussen 'oorzaken': logische OR
- Betekenis: aanwezigheid van één oorzaak C_i zal al effect e (d.i. $E = true$) teweeg brengen

$$
\begin{aligned}
P(e|C_1, C_2) &= \sum_{I_1 \vee I_2 = e} P(e|I_1, I_2) \prod_{k=1,2} P(I_k \mid C_k) \\
&= P(i_1|C_1)P(i_2|C_2) + P(\neg i_1|C_1)P(i_2|C_2) \\
&\quad + P(i_1|C_1)P(\neg i_2|C_2)
\end{aligned}
$$

Noisy OR en f_{co}

- f_{co}:

$$\text{CF}(h, e_1' \textbf{ co } e') = \text{CF}(h, e_1') + \text{CF}(h, e_2')(1 - \text{CF}(h, e_1'))$$

voor $\text{CF}(h, e_1') \in [0, 1]$ en $\text{CF}(h, e_2') \in [0, 1]$

- Causal independence met logische OR (noisy OR):

$$
\begin{aligned}
P(e|C_1, C_2) &= \sum_{I_1 \vee I_2 = e} P(e|I_1, I_2) \prod_{k=1,2} P(I_k \mid C_k) \\
&= P(i_1|C_1)P(i_2|C_2) + P(\neg i_1|C_1)P(i_2|C_2) \\
&\quad + P(i_1|C_1)P(\neg i_2|C_2) \\
&= P(i_1|C_1) + P(i_2|C_2)(1 - P(i_1|C_1))
\end{aligned}
$$

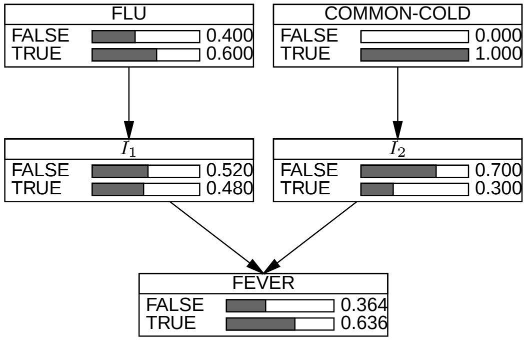
Voorbeeld

- De gevolgen van 'flu' en 'common cold' op 'fever' worden gemodelleerd via variabelen I_1 and I_2:
  - $P(i_1 \mid \textit{flu}) = 0.8$, en
  - $P(i_2 \mid \textit{common-cold}) = 0.3$
- Verder $P(i_k \mid w) = 0$, $k = 1, 2$, als $w \in \{\neg\textit{flu}, \neg\textit{common-cold}\}$
- Interactie tussen FLU and COMMON-COLD als noisy-OR:

$$P(\textit{fever} \mid I_1, I_2) = \begin{cases} 0 & \text{als } I_1 = \textit{false} \text{ en } I_2 = \textit{false} \\ 1 & \text{anders} \end{cases}$$

Resultaat

- Bayesian network:

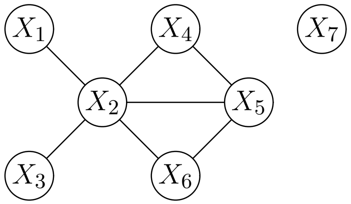


- Fragment CF model:

$$
\begin{aligned}
\text{CF}(\textit{fever}, e_1' \textbf{co } e_2') &= \text{CF}(\textit{fever}, e_1') + \text{CF}(\textit{fever}, e_2')(1 - \text{CF}(\textit{fever}, e_1')) \\
&= 0.48 + 0.3(1 - 0.48) = 0.636
\end{aligned}
$$

Logica en grafische modellen

- Structuur van kansverdelingen P weergegeven m.b.v. ongerichte grafen:



- Samen met $P(V) = P(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7)$: Markov-netwerk
- Marginalisatie (voorbeeld):

$$P(\neg x_2) = \sum_{X_1, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7} P(X_1, \neg x_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7)$$

Decompositie

- Kansverdeling van een Markov-netwerk:

$$P(V) = \frac{1}{Z} \prod_k \phi_k(X_{\{k\}}) = \frac{1}{Z} \exp \sum_k w_k f_k(V)$$

met $X_{\{k\}} \subseteq V$, $w_k \in \mathbb{R}$ een gewicht en feature $f_k(V) \in \{0, 1\}$

- De functies ϕ_k heten potentialen
- Als een Markov-netwerk chordaal is (zie Principles of Intelligent Systems) dan geldt:

$$\phi_k(X_{\{k\}}) = P(R_k \mid S_k)$$

met R_k heet de residual and S_k is de separator, d.w.z. ϕ is een conditionele kans (en $Z = 1$)

Markov logic network (MLN)

- Een Markov logic net (MLN) is een verzameling paren:

$$L = \{(F_k, w_k) \mid k = 1, \ldots, n\}$$

met F_k een formule in eerste-orde logica en $w_k \in \mathbb{R}$

- Voorbeeld (roken veroorzaakt kanker; als de ene vriend rookt, rookt ook de andere):

$$\begin{array}{ll} 0.8 & \forall x (S(x) \rightarrow C(x)) \\ 0.3 & \forall x \forall y (F(x, y) \rightarrow (S(x) \leftrightarrow S(y))) \end{array}$$

met
  - S: Smoking
  - C: Cancer
  - F: Friends

Semantiek van MLN

$C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ is een verzameling constanten, dan: corresponderende Markov network $M_{L,C}$:

- $M_{L,C}$ bevat een knoop met corresponderende binaire variabele voor elk ground atom in B_L (Herbandbasis)
- de waarde van de variabele is 1 als het ground atom waar is; anders 0
- $M_{L,C}$ bevat een volledige graaf met feature f_k voor elke instantiatie van formule F_k

Voor de kansverdeling geldt:

$$P(V) = \frac{1}{Z} \exp \sum_k w_k n_k(V) = \frac{1}{Z} \prod_k \phi_k(X_{\{k\}})^{n_k(V)}$$

met $n_k(V)$ het aantal instantiaties van F_k o.b.v. V

Voorbeeld

- Formule $F \equiv w \quad \forall x(S(x) \rightarrow C(x))$
  - met S 'smoking' en C en 'cancer'
  - gewicht w
- Constanten $C = \{a, b\}$ (interpretaties van x)

Enkele gecombineerde interpretaties van F (werelden):

$\{S(a), C(a), S(b), C(b)\}$ 2 modellen
$\{S(a), \neg C(a), S(b), \neg C(b)\}$ 0 modellen
$\{S(a), \neg C(a), S(b), C(b)\}$ 1 model

$\vdots$

$$P(S(a), C(a), S(b), C(b)) = \frac{1}{Z} e^{w2}$$ 2 modellen

Markov-netwerk: $S(a)$ —— $C(a)$ $\quad$ $S(b)$ —— $C(b)$

Alchemy systeem

- Input:
  C = {A,B}
  Friends(C,C)
  Smoking(C)
  Cancer(C)
  0.8 Smoking(x) => Cancer(x)
  0.3 Friends(x,y) => (Smoking(x) <=> Smoking(y))
- Output:
  Friends(A,A) 0.484002
  Friends(A,B) 0.476002
  Friends(B,A) 0.458004
  Friends(B,B) 0.519998
  Cancer(A) 0.569993
  Cancer(B) 0.566993

Alchemy systeem

```
Initializing MC-SAT with MaxWalksat on hard clauses...
Running MC-SAT sampling...
Sample (per pred) 100, time elapsed = 0 secs, num. clauses = 6
Done burning. 100 samples.
Sample (per pred) 100, time elapsed = 0.01 secs, num. clauses = 6
Sample (per pred) 200, time elapsed = 0.01 secs, num. clauses = 6
Sample (per pred) 300, time elapsed = 0.01 secs, num. clauses = 6
Sample (per pred) 400, time elapsed = 0.02 secs, num. clauses = 6
Sample (per pred) 500, time elapsed = 0.02 secs, num. clauses = 6
Sample (per pred) 600, time elapsed = 0.02 secs, num. clauses = 6
Sample (per pred) 700, time elapsed = 0.03 secs, num. clauses = 6
Sample (per pred) 800, time elapsed = 0.03 secs, num. clauses = 6
Sample (per pred) 900, time elapsed = 0.03 secs, num. clauses = 6
Sample (per pred) 1000, time elapsed = 0.04 secs, num. clauses = 6
Done MC-SAT sampling. 1000 samples.
```


Exacte berekening

- Input:
  C = {A,B}
  Friends(C,C)
  Smoking(C)
  Cancer(C)
  0.8 Smoking(x) => Cancer(x)
  0.3 Friends(x,y) => (Smoking(x) <=> Smoking(y))
- $P(\text{Cancer}(A)) \equiv P(C(A))$:
  - $P(C(A)) = P(S(A), C(A)) + P(\neg S(A), C(A))$
  - $Z = 1 + 3\exp 0.8$, want $\{S(A), \neg C(A)\}$ inconsistent

  $\Rightarrow P(C(A)) = 2\frac{1}{Z}\exp(0.8 \cdot 1) \approx \frac{4.45}{7.68} \approx 0.58$
- $P(\text{Friends}(A, A)) = 2\frac{1}{Z}\exp(0.3 \cdot 1)$, met $Z = 4\exp(0.3 \cdot 1)$, want 4 A, A modellen $\Rightarrow P(\text{Friends}(A, A)) = 0.5$