Redeneren met onzekerheid III

Onderwerpen:

- Regelgeassocieerde methoden voor redeneren met onzekerheid
- Subjectieve Bayesiaanse methode
- Relatie met certainty-factor model
- $\cdots$ en daarmee met Bayesiaanse netwerken
- Voorbeeldopgave

Terug naar regels

- Kies een geschikte theorie
- Vind een invulling voor de combinatiefuncties f_{and}, f_{or}, f_{prop}, f_{co}
- Implementeer de combinatiefuncties als onderdeel van een inference engine

Voorbeelden:

- Certainty-factor model (Mycin)
- Subjectieve Bayesiaanse methode (Prospector)
- Ishizuka's regelgebaseerde vereenvoudiging van Dempster-Shafer theorie

Subjectieve Bayesiaanse methode

- Toepassing van kansrekening in productieregels:

$$\textbf{if } e \textbf{ then } h_{P(h|e),P(h|\neg e)} \textbf{ fi}$$

$$e \xrightarrow{P(h|e),\, P(h|\neg e)} h$$

- Ontwikkeld door R.O. Duda, P.E. Hart, N.J. Nilsson voor Prospector
- Invulling voor de combinatiefuncties:
  - f_{prop}
  - f_{and} en f_{or}
  - f_{co}

Voorbeeld

$$\mathcal{R} = \{R_1 : \textbf{if } \textit{flu} \textbf{ then } \textit{fever}_{\substack{P(\textit{fever}|\textit{flu}) = 0.8, \\ P(\textit{fever}|\neg\textit{flu}) = 0.1}} \textbf{ fi},$$

$$R_2 : \textbf{if } \textit{common-cold} \textbf{ then } \textit{fever}_{\substack{P(\textit{fever}|\textit{common-cold}) = 0.3, \\ P(\textit{fever}|\neg\textit{common-cold}) = 0.05}} \textbf{ fi}\}$$

Feiten F:

- $P(\textit{flu} \mid e') = 0.6$ en
- $P(\textit{common-cold} \mid e') = 1$

met e' achtergrondkennis (alles wat je to zover weet)

Apriori-kennis: $P(\textit{fever}) = 0.2$

Vraag: wat is $P(\textit{fever} \mid e')$?

Herschrijven inferentienetwerk

Combinatiefuncties:

(1) Propagatie van onzekerheid f_{prop}:

$$e' \xrightarrow{P(e|e')} e \xrightarrow{P(h|e),\ P(h|\neg e)} h$$

$$\Downarrow$$

$$e' \xrightarrow{P(h|e')} h$$

Er geldt:

$$P(h \mid e') \;=\; P(h \mid e, e')P(e \mid e') + P(h \mid \neg e, e')P(\neg e \mid e')$$

Blokkeren van invloed

Blokkeren van de invloed van E' op H:

$$E' \longrightarrow E \longrightarrow H$$

- H is *conditioneel onafhankelijk* van E' gegeven E als:

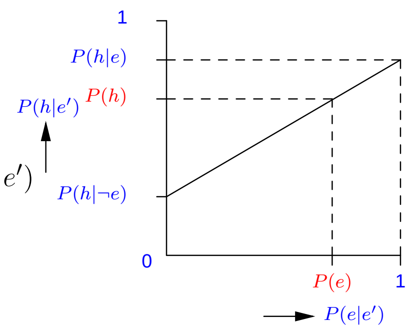
  $$P(H \mid E, E') = P(H \mid E)$$

  als $P(E', E) > 0$
- Betekenis: E' draagt niet bij aan de kennis over H als we E al weten met absolute zekerheid
- Dit geldt voor alle waarden van E, E' en H

Propagatie van kansinformatie

- H is conditioneel onafhankelijk van E' gegeven E:

  $P(h \mid e') = P(h \mid e)P(e \mid e')$
  $\quad + P(h \mid \neg e)P(\neg e \mid e')$
  $= [P(h \mid e) - P(h \mid \neg e)]P(e \mid e')$
  $\quad + P(h \mid \neg e)$



- Lineaire functie in x:

  $f(x) = ax + b$
  $\Rightarrow a = P(h \mid e) - P(h \mid \neg e)$;
  $b = P(h \mid \neg e)$

Als $P(e \mid e') = P(e)$, dan:

$$P(h \mid e') = P(h \mid e)P(e) + P(h \mid \neg e)P(\neg e) = P(h)$$

Combinatiefuncties (vervolg)

(2) Samengestelde aanwijzingen

$$e' \xrightarrow{P(e_1|e')} e_1$$

$$e' \xrightarrow{P(e_2|e')} e_2$$

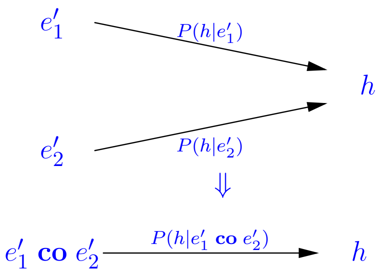
$$\Downarrow$$

$$e' \xrightarrow{P(e_1 \textbf{ and } e_2, e')} e_1 \textbf{ and } e_2$$

- f_{and}: $P(e_1 \textbf{ and } e_2 \mid e') = \min\{P(e_1 \mid e'), P(e_2 \mid e')\}$
- f_{or}: $P(e_1 \textbf{ or } e_2 \mid e') = \max\{P(e_1 \mid e'), P(e_2 \mid e')\}$

Combinatiefuncties (vervolg)

(3) Co-concluderende regels f_{co}:



Veronderstelling: $P(h \mid e_1' \textbf{ co } e_2') = P(h \mid e_1', e_2')$ (dus **co** $\equiv \wedge$)

Regel van Bayes: $P(h \mid e_1', e_2') = P(e_1', e_2' \mid h)P(h)/P(e_1', e_2')$

Co-concluderende regels

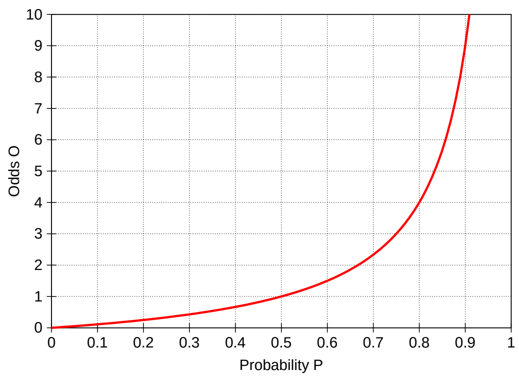
- E_1' en E_2' zijn conditioneel onafhankelijk gegeven H:

$$P(h \mid e_1', e_2') = \frac{P(e_1' \mid h)P(e_2' \mid h)P(h)}{P(e_1', e_2')}$$

- Echter alleen $P(h \mid e_i')$, $i = 1, 2$, zijn bekend
$\Rightarrow$ regel van Bayes: $P(e_i' \mid h) = P(h \mid e_i')P(e_i')/P(h)$,
maar $P(e_i')$ is niet direct beschikbaar
- Truc: $P(\neg h \mid e_1', e_2') = \frac{P(e_1'|\neg h)P(e_2'|\neg h)P(\neg h)}{P(e_1',e_2')}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{P(h \mid e_1', e_2')}{P(\neg h \mid e_1', e_2')} &= \frac{P(e_1' \mid h)}{P(e_1' \mid \neg h)} \frac{P(e_2' \mid h)}{P(e_2' \mid \neg h)} \frac{P(h)}{P(\neg h)} \\
&= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot O(h) = O(h \mid e_1', e_2')
\end{aligned}$$

Odds en kansen



Er geldt:

- $O(h \mid e) = 1$ als $P(h \mid e) = 0.5$
- $O(h \mid e) \to \infty$ als $P(h \mid e) \uparrow 1$

Co-concluderende regels – Odds

- Oddsvorm: $O(h \mid e_1', e_2') = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot O(h)$, met

$$\begin{aligned}
\lambda_i &= \frac{P(e_i' \mid h)}{P(e_i' \mid \neg h)} = \frac{(P(h \mid e_i')P(e_i'))/P(h)}{(P(\neg h \mid e_i')P(e_i'))/P(\neg h)} \\
&= \frac{P(h \mid e_i')}{P(\neg h \mid e_i')} \cdot O(\neg h) = \frac{O(h \mid e_i')}{O(h)}
\end{aligned}$$

voor elke regel $i = 1, 2$

- Terug naar kansen:

$$P(h \mid e_1', e_2') = \frac{O(h \mid e_1', e_2')}{1 + O(h \mid e_1', e_2')}$$

Voorbeeld (herhaling)

$\mathcal{R} = \{R_1 : \textbf{if } \textit{flu} \textbf{ then } \textit{fever}_{\substack{P(\textit{fever}|\textit{flu}) = 0.8, \\ P(\textit{fever}|\neg\textit{flu}) = 0.1}} \textbf{ fi},$

$R_2 : \textbf{if } \textit{common-cold} \textbf{ then } \textit{fever}_{\substack{P(\textit{fever}|\textit{common-cold}) = 0.3, \\ P(\textit{fever}|\neg\textit{common-cold}) = 0.05}} \textbf{ fi}\}$

Feiten F:

- $P(\textit{flu} \mid e') = 0.6$ en
- $P(\textit{common-cold} \mid e') = 1$

met e' achtergrondkennis (alles wat je to zover weet)

Apriori-kennis: $P(\textit{fever}) = 0.2 \Rightarrow O(\textit{fever}) = 0.2/0.8 = 1/4$

Vraag: wat is $P(\textit{fever} \mid e')$?

Voorbeeld

- Regel R_1: $P(\textit{fever}|\textit{flu}) = 0.8$ en $P(\textit{fever}|\neg\textit{flu}) = 0.1$
  - Feit: $P(\textit{flu} \mid e') = 0.6$
  - Propagatie:

$$\begin{aligned} P(\textit{fever} \mid e'_1) &= [P(\textit{fever}|\textit{flu}) - P(\textit{fever}|\neg\textit{flu})]\, P(\textit{flu} \mid e') \\ &\quad + P(\textit{fever}|\neg\textit{flu}) \\ &= (0.8 - 0.1) \times 0.6 + 0.1 = 0.52 \end{aligned}$$

- Co-concluderen:
  - $\lambda_1 = P(\textit{fever} \mid e'_1)/(P(\neg\textit{fever} \mid e'_1) O(\textit{fever})) = (0.52/0.48) \times 4 = 4\frac{1}{3}$

Voorbeeld (vervolg)

- Regel R_2: $P(\textit{fever}|\textit{common-cold}) = 0.3$ en $P(\textit{fever}|\neg\textit{common-cold}) = 0.05$
  - Feit: $P(\textit{common-cold} \mid e') = 1$
  - Propagatie:

$$\begin{aligned} P(\textit{fever}|e'_2) &= [P(\textit{fever}|\textit{com-cold}) - P(\textit{fever}|\neg\textit{com-cold})] \\ &\quad \cdot P(\textit{com-cold} \mid e') + P(\textit{fever}|\neg\textit{com-cold}) \\ &= (0.3 - 0.05) \times 1 + 0.05 = 0.3 \end{aligned}$$

- Co-concluderen:
  - $\lambda_2 = P(\textit{fever} \mid e'_2)/(P(\neg\textit{fever} \mid e'_2) O(\textit{fever})) = (0.3/0.7) \times 4 \approx 1.71$

Voorbeeld (vervolg)

Bepaald:

- $\lambda_1 = 4\frac{1}{3}$
- $\lambda_2 = 1.71$
- $O(\textit{fever}) = 1/4$

We kunnen nu uitrekenen:

$$\begin{aligned} O(\textit{fever} \mid e'_1 \textbf{ co } e'_2) &= \lambda_1 \lambda_2 O(\textit{fever}) \\ &= 4.33 \times 1.71 \times 0.25 \\ &\approx 1.85 \end{aligned}$$

Dus: $P(\textit{fever} \mid e'_1 \textbf{ co } e'_2) = 1.85/(1 + 1.85) = 0.65$

Vergelijk apriori-kennis: $P(\textit{fever}) = 0.2$

Vergelijking certainty factors

(1) Propagatie:

- Subjectieve Bayesiaanse methode:

$$P(h \mid e') = [P(h \mid e) - P(h \mid \neg e)]P(e \mid e') + P(h \mid \neg e)$$

- Certainty-factor calculus:

$$\text{CF}(h, e') = \text{CF}(h, e) \cdot \max\{0, \text{CF}(e, e')\}$$

(2) Samengestelde aanwijzingen:

- Subjectieve Bayesiaanse methode (f_{and})

$$P(e_1 \textbf{ and } e_2 \mid e') = \min\{P(e_1 \mid e'), P(e_2 \mid e')\}$$

- Certainty-factor calculus:

$$\text{CF}(e_1 \textbf{ and } e_2, e') = \min\{\text{CF}(e_1, e'), \text{CF}(e_2, e')\}$$

Vergelijking certainty factors (vervolg)

Co-concluderende regels:

- Subjectieve Bayesiaanse methode:

$$O(h \mid e'_1, \ldots, e'_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda'_i \cdot O(h)$$

met

$$P(h \mid e'_1, \ldots, e'_n) = \frac{O(h \mid e'_1, \ldots, e'_n)}{1 + O(h \mid e'_1, \ldots, e'_n)}$$

- Certainty-factor calculus:

$$\text{CF}(h, e'_1 \textbf{ co } e') = \text{CF}(h, e'_1) + \text{CF}(h, e'_2)(1 - \text{CF}(h, e'_1))$$

$\Rightarrow$ volstrekt andere probabilistische interpretatie

Opgave

Beschouw de volgende verzameling produktieregels $\mathcal{R}$:

R_1 : **if** a **or** b **then** $c_{0.8}$ **fi**

R_2 : **if** e **then** $a_{0.8}$ **fi**

R_3 : **if** f **then** $b_{1.0}$ **fi**

met de volgende (initiële) feitenverzameling $F = \{e_{0.7}, f_{0.5}\}$, waarin geabstraheerd is van de structuur van condities, conclusies en feiten.

- Geef aan onder welke voorwaarden de subjectieve Bayesiaanse methode toegepast kan worden voor de berekening van de onzekerheid met betrekking tot de hypothese c.
- Pas deze veronderstellingen toe bij het berekenen van $P(c|e')$, waarbij in e' alle gegeven aanwijzingen verwerkt zijn.