Berekenbaarheid 2018
Tentamen
1 november 2018

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Er zijn 9 opgaven die ieder 10 punten opleveren, de eerste 10 punten zijn gratis, en het cijfer voor het tentamen is het aantal punten gedeeld door 10.

Turing-machines moeten altijd gegeven worden door middel van een toestandsdiagram met rondjes en pijlen, en dus *niet* als een tabel. In alle Turing-machines mogen hulpsymbolen worden gebruikt.

Veel succes!

1. We definiëren de taal L_1 als

   $$L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a > |w|_b\}$$

   waarin $|w|_a$ het aantal a's in w en $|w|_b$ het aantal b's in w is. Er geldt bijvoorbeeld $babaa \in L_1$ want $|babaa|_a = 3 > |babaa|_b = 2$, maar $aabb \notin L_1$ want $|aabb|_a = 2 \not> |aabb|_b = 2$.

   Geef een standaard Turing-machine M_1 die L_1 accepteert door stoppen.

2. We definiëren de taal L_2 als

   $$L_2 := \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \text{er is een } u \in \{a,b,c\}^* \text{ zodat } w \text{ zowel } cuc \text{ als } cu^Rc \text{ bevat}\}$$

   Er geldt bijvoorbeeld $acacbbcacb \in L_2$ want $acacbbcacb$ bevat onder meer zowel cuc als cu^Rc met $u = acbb$ (dat zijn dus de woorden $cacbbc$ en $cbbcac$: $a\underline{cacbbc}acb$ en $aca\underline{cbbcac}b$).

   Geef een non-deterministische Turing-machine M_2 met twee tapes die de taal L_2 accepteert door eindtoestand. Een woord uit de taal $w \in L_2$ moet worden herkend in minder dan $3|w| + 2$ stappen.

3. We definiëren de numerieke functie sqrt door

   $$\mathsf{sqrt}(x) := \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$

   Geef een numerieke Turing-machine die sqrt uitrekent. Je mag in je machine de macro's gebruiken uit de lijst op pagina 3.

   Hint: Zoek in een lus de kleinste n met $n^2 > x$, en trek daar vervolgens nog één vanaf.

4. (a) Als een taal L recursief is, is het complement $\overline{L}$ dan ook altijd recursief?

(b) Als een taal L recursief opsombaar is, is het complement $\overline{L}$ dan ook altijd recursief opsombaar?

Geef in beide gevallen een verklaring van je antwoord, en als het antwoord negatief is daarbij ook een tegenvoorbeeld.

5. Geef een code $R(M_5)$ van een Turing-machine M_5 zodat $M_5(R(M_5)) = 1$. Teken bij je antwoord ook het toestandsdiagram van M_5.

6. Het probleem P_6 heeft als input een code $R(M)$ van een Turing-machine, en vraagt hierover of de taal $L(M)$ van deze machine eindig is. Laat zien (zonder de stelling van Rice te gebruiken, want die is dit jaar niet behandeld) dat P_6 onbeslisbaar is.

7. Geef numerieke functies f_7 en g_7 met $f_7 \neq g_7$ maar $f_7 \circ g_7 = g_7 \circ f_7$. Verklaar je antwoord.

8. We definiëren de numerieke functie f_8 met primitieve recursie door de recursievergelijkingen

$$\begin{aligned} f_8(0) &= 0 \\ f_8(y+1) &= f_8(y) + \mathsf{eq}\big((f_8(y)+1)^2, y+1\big) \end{aligned}$$

(a) Geef de waarde van $f_8(4)$.

(b) Schrijf f_8 als

$$f_8 = \textbf{primrec}(g, h)$$

en geef g en h als compositie van functies op pagina 4 van dit tentamen.

9. We definiëren de numerieke functie digits als

$$\mathsf{digits}(x) = \text{het Gödel-getal van het rijtje van de cijfers van } x$$

Er geldt bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} \mathsf{digits}(0) &= \mathsf{gn}_0(0) = 2^{0+1} = 2 \\ \mathsf{digits}(1) &= \mathsf{gn}_0(1) = 2^{1+1} = 4 \\ \mathsf{digits}(10) &= \mathsf{gn}_1(1,0) = 2^{1+1}3^{0+1} = 12 \\ \mathsf{digits}(42) &= \mathsf{gn}_1(4,2) = 2^{4+1}3^{2+1} = 864 \\ \mathsf{digits}(666) &= \mathsf{gn}_2(6,6,6) = 2^{6+1}3^{6+1}5^{6+1} = 21870000000 \end{aligned}$$

Laat zien dat digits een μ-recursieve functie is. (Het is zelfs een primitief recursieve functie, maar dat hoef je niet te laten zien.)

Hint: Definieer eerst een functie f_9 die een Gödel-getal dat een output is van digits terugrekent naar het oorspronkelijke getal, en laat zien dat deze functie primitief recursief is. Definieer vervolgens digits in termen van deze functie. In beide definities kunnen de functies gdln en gdn nuttig zijn.

Macro's voor Turing-machines voor numerieke berekeningen

$$\rightarrow\boxed{\mathrm{S}}\rightarrow$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$$

$$\rightarrow\boxed{\mathrm{Z}}\rightarrow$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad B$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\ldots B$$

$$\rightarrow\boxed{\mathrm{E}}\rightarrow$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$$

termineert niet

$$\rightarrow\boxed{\mathrm{P}_i^{(k)}}\rightarrow$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;B\ldots\quad\ldots B$$

$$\rightarrow\boxed{\mathrm{C}_m^{(k)}}\rightarrow$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;B\ldots\quad\ldots B$$

$$\rightarrow\boxed{\mathrm{A}}\rightarrow$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$$

$$\rightarrow\boxed{\mathrm{D}}\rightarrow$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad B$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\mathbin{\dot{-}}1}\ldots B$$

$$\rightarrow\boxed{\mathrm{SUB}}\rightarrow$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\mathbin{\dot{-}}m}\ldots B$$

$$\rightarrow\boxed{\mathrm{MULT}}\rightarrow$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\ldots$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\ldots$$

$$\rightarrow\boxed{\mathrm{MR}_k}\rightarrow$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$$

$$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$$

$$\rightarrow\boxed{\mathrm{ML}_k}\rightarrow$$

$$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$$

$$\rightarrow\boxed{\mathrm{FR}}\rightarrow$$

$$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i\geq 0)$$

$$B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$$

$$\rightarrow\boxed{\mathrm{FL}}\rightarrow$$

$$B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B} \qquad (i\geq 0)$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$$

$$\rightarrow\boxed{\mathrm{E}_k}\rightarrow$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$$

$$\underset{\uparrow}{B}\ldots\qquad\ldots B$$

$$\rightarrow\boxed{\mathrm{T}}\rightarrow$$

$$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i\geq 0)$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$$

$$\rightarrow\boxed{\mathrm{INT}}\rightarrow$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$$

$$\rightarrow\boxed{\mathrm{CPY}_k}\rightarrow$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\ldots\qquad\ldots B$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$$

$$\rightarrow\boxed{\mathrm{CPY}_{k,i}}\rightarrow$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\ldots\qquad\ldots B$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$$

$$\begin{tikzcd}\arrow[r] & \boxed{\mathrm{BRN}} \arrow[r, "n=0"] \arrow[d, "n>0"] & {} \\ & {} & \end{tikzcd}$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$$

Codering van transities

Symbol	Encoding
0	1
1	11
B	111
q_0	1
q_1	11
$\vdots$	$\vdots$
q_n	1^{n+1}
L	1
R	11

Let $en(x)$ denote the encoding of a symbol x. A transition $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$ is encoded by the string

$$en(q_i)0en(x)0en(q_j)0en(y)0en(d).$$

Primitief recursieve functies

$$\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \mathbin{\dot{-}} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \mathbin{\dot{-}} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{fact}(x) &= x! \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1 \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0 \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& \text{(dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{gn}_n(x_0,\ldots,x_n) &= \mathsf{pn}(0)^{x_0+1}\mathsf{pn}(1)^{x_1+1}\cdots\mathsf{pn}(n)^{x_n+1} = \text{Gödel-getal van het rijtje } \langle x_0,\ldots,x_n\rangle \\
\mathsf{dec}(i,x) &= i\text{-de element in het rijtje bij het Gödel-getal } x
\end{aligned}$$

$$\mathsf{gdn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \text{ het Gödel-getal is van een rijtje} \\ 0 & \text{als } x \text{ geen Gödel-getal is} \end{cases}$$

$$\mathsf{gdln}(x) = \begin{cases} n & \text{als } x \text{ het Gödel-getal is van een rijtje met lengte } n \\ 0 & \text{als } x \text{ geen Gödel-getal is} \end{cases}$$