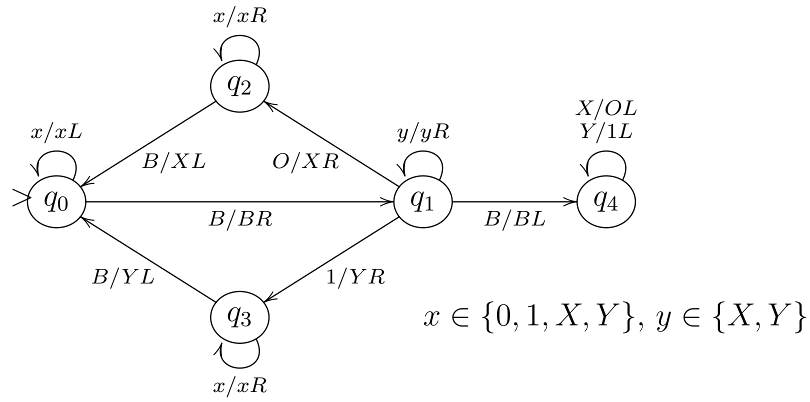
**Berekenbaarheid 2018**
**Uitwerkingen Toets 1**
**1 oktober 2018**

1. Definieer (door middel van een toestandsdiagram) een standaard Turing-machine $M_1$ met $\Sigma = \{0,1\}$ en $\Gamma = \{B,0,1,X,Y,U,V\}$ die zijn input verdubbelt, dus met (2 punten)

$$M_1(w) = ww$$

voor alle $w \in \Sigma^*$. Zorg ervoor dat bij terminatie de lees-/schrijfkop van $M_1$ weer vooraan de tape staat.

$M_1$ :

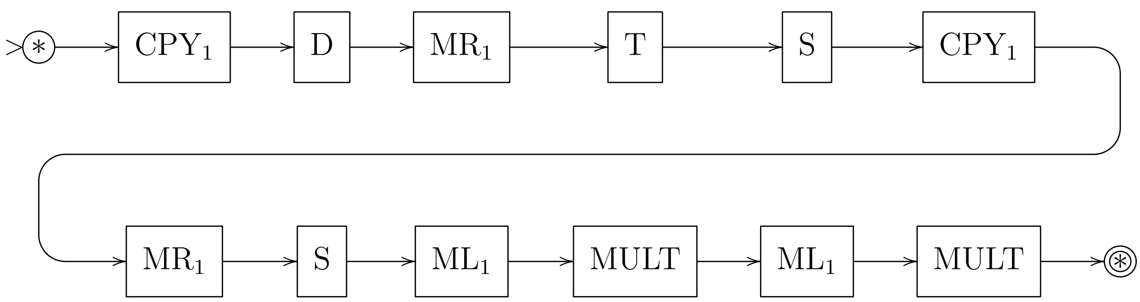



2. Definieer een numerieke Turing-machine $M_2$ die de functie (2 punten)

$$f_2(x) = (x \dot{-} 1)(x+1)(x+2)$$

uitrekent. Je mag in de definitie van $M_2$ gebruik maken van de macros op de achterzijde van dit blaadje.

$M_2$ :



3. Eén van de bewijzen van de onbeslisbaarheid van het halting probleem is een bewijs uit het ongerijmde. Er wordt (om daaruit een tegenspraak af te leiden) aangenomen dat het halting probleem beslisbaar zou zijn. Vervolgens wordt met deze aanname een Turing-machine $D$ gedefinieerd met de eigenschap

$$D(R(M))\downarrow \iff M(R(M))\uparrow$$

(a) Wat betekenen de notaties $M(w)\downarrow$ en $M(w)\uparrow$? (1 punt)

$M(w)\downarrow$ betekent dat de machine $M$ met input $w$ termineert.

$M(w)\uparrow$ betekent dat de machine $M$ met input $w$ niet termineert of abnormaal termineert (= links van de tape afloopt).

(b) Beschrijf de constructie van deze machine $D$. Geef hierbij in het bijzonder aan hoe in deze constructie de aanname dat het halting probleem beslisbaar zou zijn wordt gebruikt. Je beschrijving mag zowel in woorden als in de vorm van een diagram. (1 punt)

De aanname dat het halting probleem beslisbaar is betekent dat er een machine $H$ is die het halting probleem beslist, dus met

$$H(R(M)w) = \begin{cases} 1 & \text{als } M(w)\downarrow \\ 0 & \text{als } M(w)\uparrow \end{cases}$$

De machine $D$ wordt uit deze machine $H$ gedefinieerd.

In woorden doet $D$, met input $R(M)$:

i. Verdubbel de input $R(M)$ tot $R(M)R(M)$. Deze stap is de machine waar in opgave 1 van deze toets om werd gevraagd.

ii. Voer de machine $H$ uit. Als $M(R(M))\downarrow$ dan staat er nu een 1 op de tape, en als $M(R(M))\uparrow$ dan staat er een 0 op de tape.

iii. Als er een 1 op de tape staat, stop dan niet (door oneindig naar rechts over de tape te gaan lopen). Als er een 0 op de tape staat, stop dan.

(c) Hoe wordt uit de hierboven gegeven eigenschap van $D$ een tegenspraak afgeleid? (1 punt)

Door in de eigenschap

$$D(R(M))\downarrow \iff M(R(M))\uparrow$$

voor $M$ de machine $D$ te nemen. Dit betekent dus: door te kijken wat de equivalentie betekent voor het geval dat $D$ zijn eigen code $R(D)$ als input krijgt.

Er moet dan gelden dat

$$D(R(D))\downarrow \iff D(R(D))\uparrow$$

en dat kan natuurlijk niet.

4. Het probleem $P_4$ heeft als input een code van een deterministische Turing-machine $R(M)$ en vraagt daarover of $M$ de eigenschap heeft dat $M(w) = ww$ voor alle $w \in \Sigma^*$. Dit probleem vraagt dus of $M$ een correcte uitwerking is van opgave 1 van deze toets. Laat zien dat dit probleem $P_4$ onbeslisbaar is. (Hint: bij het construeren van input voor dit probleem kan het handig zijn die in de vorm van een twee-tape machine te beschrijven.) (2 punten)

   Dat probleem $P_4$ onbeslisbaar is laten we zien door het blank tape $B$ naar $P_4$ te reduceren. Stel dat $P_4$ beslisbaar zou zijn, dan volgt daaruit dat dan ook $B$ beslisbaar is, maar we weten dat dat niet het geval is.

   Voor deze reductie moeten we bij iedere input $R(M)$ van probleem $B$ een input $R(M')$ voor probleem $P_4$ maken zodat geldt:

$$M(\lambda)\downarrow \iff \text{voor alle } w \in \Sigma^* \text{ geldt dat } M'(w) = ww$$

   De constructie van $M'$ uit $M$ is als volgt. Het is de 1-tape standaard machine die dezelfde berekening doet als een 2-tape machine die de volgende stappen doet:

   (a) voer $M$ uit op tape 2

   (b) verdubbel de input $w$ op tape 1 (voer dus de oplossing van opgave 1 van deze toets uit op tape 1)

   Als $M$ niet stopt met input de lege tape, zal $M'$ ook niet stoppen (ongeacht de input op tape 1, want tape 2 is altijd leeg), en voldoet $M'$ dus niet aan de eigenschap van $P_4$. Als $M$ wel stopt met input de lege tape, zal $M'$ ook stoppen, met als output $ww$ op de output tape. En dus voldoet $M'$ dan aan de eigenschap van $P_4$.

   De constructie van $M'$ uit $M$ bestaat uit de constructie die hierboven wordt beschreven, plus het omzetten van een 2-tape machine naar een 1-tape machine zoals in het boek en de cursus is beschreven. Dit is allebei berekenbaar, dus het omzetten van de code $R(M)$ in de code $R(M')$ kan door een Turing-machine worden gedaan.