Opgaven bij Hoofdstuk 5 - Redeneren met Onzekerheid

Opgave 1

a. Een op produktieregels gebaseerd expertsysteem maakt gebruik van het certainty factor model voor het redeneren met onzekerheid. Gegeven zijn de volgende vijf produktieregels (voor de eenvoud zijn in de condities en de conclusies van de regels alleen de attributen getoond):

$$\begin{aligned}\{&R_1 : \textbf{if } a \textbf{ or } b \textbf{ then } f_{0,5} \textbf{ fi},\\ &R_2 : \textbf{if } b \textbf{ then } e_{-1,0} \textbf{ fi},\\ &R_3 : \textbf{if } c \textbf{ then } e_{1,0} \textbf{ fi},\\ &R_4 : \textbf{if } c \textbf{ and } d \textbf{ then } f_{0,8} \textbf{ fi},\\ &R_5 : \textbf{if } e \textbf{ then } f_{0,9} \textbf{ fi}\}\end{aligned}$$

Het attribuut f is het doelattribuut van top-down inferentie met deze regels. Tijdens de inferentie geeft de gebruiker desgevraagd voor de attributen a, b, c en d respectievelijk de zekerheidsfactoren 0,7, 0,8, 0,5, en 0,7. Teken het inferentienetwerk dat bij top-down inferentie met bovenstaande regels en feiten resulteert. Welke zekerheidsfactor wordt voor f berekend? Motiveer uw antwoord.

b. In de subjectieve Bayesiaanse methode wordt voor het berekenen van een kans voor een samengestelde aanwijzing gebruik gemaakt van de volgende combinatiefuncties:

$$P(e_1 \textbf{ and } e_2|e') = \min\{P(e_1|e'), P(e_2|e')\}$$

$$P(e_1 \textbf{ or } e_2|e') = \max\{P(e_1|e'), P(e_2|e')\}$$

Laat door middel van een voorbeeld zien dat deze combinatiefuncties vanuit probabilistisch oogpunt incorrect zijn.

c. Beschouw de produktieregel **if** e **then** h **fi**. Voor toepassing van de subjectieve Bayesiaanse methode voor het redeneren met onzekerheid worden met deze regel schattingen van de kansen $P(h|e)$, $P(h|\bar{e})$, $P(h)$ en $P(e)$ geassocieerd. Veronderstel dat deze schattingen aan de volgende eigenschappen voldoen:

$$P(h|e) = P(h|\bar{e}), \text{ en}$$

$$P(h|e)P(e) + P(h|\bar{e})P(\bar{e}) < P(h)$$

De combinatiefunctie voor het propageren van onzekerheden in aanwijzingen die met de genoemde regel is geassocieerd, is gedefinieerd in termen van deze schattingen. Geef deze combinatiefunctie in een figuur weer. Leg uit hoe u aan uw antwoord komt.

Opgave 2

a. Een op produktieregels gebaseerd expertsysteem maakt gebruik van het certainty factor model voor het redeneren met onzekerheid. Gegeven zijn de volgende vier produktieregels (voor de eenvoud zijn in de condities en de conclusies van de regels alleen de attributen getoond):

$\{R_1$: **if** a **or** b **or** c **then** $f_{1,0}$ **fi**,
R_2: **if** c **and** d **then** $f_{0,5}$ **fi**,
R_3: **if** f **then** $g_{0,2}$ **fi**,
R_4: **if** e **then** $f_{-0,6}$ **fi**$\}$

Het attribuut g is het doelattribuut van top-down inferentie met deze regels. Tijdens de inferentie geeft de gebruiker desgevraagd voor de attributen a, b, c, d en e respectievelijk de zekerheidsfactoren 0,8, 0,4, 0,7, 0,6 en 1,0. Teken het inferentienetwerk dat bij top-down inferentie met bovenstaande regels en feiten resulteert. Welke zekerheidsfactor wordt voor g berekend? Motiveer uw antwoord.

b. Beschouw nogmaals een regelgebaseerd expertsysteem dat voor het redeneren met onzekerheid gebruik maakt van het certainty factor model. Laat zien dat de combinatiefunctie voor co-concluderende produktieregels die in dit model gebruikt wordt, niet idempotent is. Zou idempotentie een voor deze functie wenselijke eigenschap zijn? Motiveer uw antwoord.

c. Beschouw de produktieregel **if** e **then** h **fi**. Voor toepassing van de subjectieve Bayesiaanse methode voor het redeneren met onzekerheid worden met deze regel schattingen van de kansen $P(h|e)$, $P(h|\bar{e})$, $P(h)$ en $P(e)$ gegeven. Veronderstel dat deze schattingen aan de volgende eigenschappen voldoen:

$P(h|e) = P(h|\bar{e})$, en
$P(h|e)P(e) + P(h|\bar{e})P(\bar{e}) = P(h)$

De combinatiefunctie voor het propageren van onzekerheden in aanwijzingen die met de genoemde regel is geassocieerd, is gedefinieerd in termen van deze schattingen. Geef de combinatiefunctie in een figuur weer. Leg uit hoe u aan uw antwoord komt.

d. In een produktiesysteem waarin gebruik gemaakt wordt van top-down inferentie, is de volgende verzameling produktieregels gegeven:

$\{R_1:$ **if** $same(o, a, v)$ **then** $add(o, b, w)$ **with** 0.6 **fi**,
$R_2:$ **if** $same(o, c, u)$ **then** $add(o, b, w)$ **with** 1.0 **fi**,
$R_3:$ **if** $same(o, d, z)$ **then** $add(o, b, w)$ **with** 0.5 **fi**$\}$

en de volgende feitenverzameling $F = \{o.a = v_1, o.c = u_{0.5}, o.d = z_{0.2}\}$. Alle attributen in de kennisbank zijn eenwaardig; b is een doelattribuut.

Stel dat gebruik gemaakt wordt van de subjectieve Bayesiaanse methode als methode voor redeneren met onzekerheid. De gegeven getallen stellen derhalve kansen voor, waarbij, bijvoorbeeld, het getal in de conclusie van regel R_1

geïnterpreteerd wordt als de voorwaardelijke kans $P(o.b = w|o.a = v) = 0.6$. Verder wordt aangenomen dat $P(o.b = w|X) = 0$, waarin X een expressie voorstelt die ongelijk is aan $o.a = v$, $o.c = u$ en $o.d = z$. Tevens is bekend dat de a priori kans $P(o.b = w) = 0.5$.

Bereken nu de a posteriori kans $P(o.b = w|e')$, waarbij e' de verzameling van alle aanwijzingen voorstelt, met gebruikmaking van de subjectieve Bayesiaanse methode.

Opgave 3

a. Een op produktieregels gebaseerd systeem gebruikt zekerheidsfactoren voor het redeneren met onzekerheid. Gegeven is de volgende verzameling van drie produktieregels (alleen de attributen in de condities en conclusies zijn weergegeven):

$\{R_1$: **if** a **and** g **and** b **then** $f_{0,5}$ **fi**,
R_2: **if** g **or** c **then** $a_{0,8}$ **fi**,
R_3: **if** d **or** e **then** $f_{0,3}$ **fi**$\}$

Veronderstel verder dat de attributen b, c, d, e en g met de respectievelijke zekerheidsfactoren 0,4, 0,5, 0,7, 0,6 en 0,5 zijn vastgesteld. Het attribuut f is het doelattribuut van de top-down inferentie. Teken het bij deze regels en feiten behorende inferentienetwerk. Wat is de resulterende zekerheidsfactor voor f als de regels toegepast worden? Motiveer uw antwoord.

b. Zij Ω de uitkomstenruimte van een experiment, en zij $h, e \subseteq \Omega$. Bewijs dat de maat van vertrouwen $\mathrm{MB}(h, e)$ in het certainty-factor model van Shortliffe en Buchanan voor het geval dat $P(h) = 1$ gelijk is aan $P(h|e)$.
Aanwijzing. Onderscheid twee gevallen: (1) $e \subseteq h$, en (2) $e \not\subseteq h$, en maak vervolgens gebruik van de definities van de a priori en a posteriori kansen, en van de definitie van de maat van vertrouwen.

c. Zij $\Theta = \{a, b, c\}$ een onderscheidingsverzameling in de theorie van Dempster en Shafer. Stel dat de volgende functiewaarden voor de waarschijnlijkheidstoekenning m gegeven zijn: $m(\{a, b\}) = 0{,}4$, $m(\{c\}) = 0{,}2$, en $m(\{a, c\}) = 0{,}1$. Vul nu de functiewaarden van m aan voor het geval dat niet meer specifieke aanwijzingen dan de gegeven aanwijzingen beschikbaar zijn. Bepaal het geloofwaardigheidsinterval voor $\{a, b\}$. Wat kunt u op grond van dit interval zeggen over de informatie die beschikbaar is over $\{a, b\}$?

d. Beschouw de onderscheidingsverzameling $\Theta = \{a, b, c, d\}$ en twee waarschijnlijkheidstoekenningen m_1 en m_2. Deze functies zijn als volgt gedefinieerd:

$$m_1(x) = \begin{cases} 0{,}3 & \text{als } x = \Theta \\ 0{,}6 & \text{als } x = \{a, c\} \\ 0{,}1 & \text{als } x = \{a, b, c\} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

$$m_2(x) = \begin{cases} 0{,}8 & \text{als } x = \Theta \\ 0{,}2 & \text{als } x = \{a, c\} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Teken het doorsnedetableau voor $m_1 \oplus m_2$. Bereken de waarde van $\text{Bel}_1 \oplus \text{Bel}_2(\{a, c\})$.

Opgave 4

a. Een op produktieregels gebaseerd expertsysteem maakt gebruik van het certainty factor model voor het redeneren met onzekerheid. Gegeven zijn de volgende produktieregels (voor de eenvoud zijn in de condities en de conclusies van de regels alleen de attributen getoond):

$\{R_1$: **if** a **or** b **then** $h_{0,70}$ **fi**,
R_2: **if** c **and** d **then** $b_{1,00}$ **fi**,
R_3: **if** c **then** $e_{0,85}$ **fi**,
R_4: **if** f **then** $b_{-0,8}$ **fi**,
R_5: **if** f **and** g **then** $h_{0,25}$ **fi**$\}$

Het attribuut h is het doelattribuut van top-down inferentie met deze regels. Tijdens de inferentie geeft de gebruiker desgevraagd voor de attributen a, c, d, f en g respectievelijk de zekerheidsfactoren 0,35, 0,95, 0,7, 0,5 en 0,4. Teken het inferentienetwerk dat bij top-down inferentie met bovenstaande regels en feiten resulteert. Welke zekerheidsfactor wordt voor h berekend? Motiveer uw antwoord.

b. Beschouw nogmaals een regelgebaseerd expertsysteem dat voor het redeneren met onzekerheid gebruik maakt van het certainty factor model. Veronderstel nu dat in de regelverzameling van dat systeem uitsluitend positieve zekerheidsfactoren zijn gespecificeerd. Toon aan dat de voor een gegeven doelhypothese resulterende zekerheidsfactor onafhankelijk is van de volgorde waarin de produktieregels tijdens top-down inferentie worden toegepast.

c. Beschouw de produktieregel **if** e **then** h **fi**. Voor toepassing van de subjectieve Bayesiaanse methode voor het redeneren met onzekerheid worden met deze regel schattingen van de kansen $P(h|e)$, $P(h|\bar{e})$, $P(h)$ en $P(e)$ gegeven. Veronderstel dat deze schattingen aan de volgende eigenschappen voldoen:

$P(h|e) < P(h|\bar{e})$, en
$P(h|e)P(e) + P(h|\bar{e})P(\bar{e}) < P(h)$

De combinatiefunctie voor het propageren van onzekerheden in aanwijzingen die met de genoemde regel is geassocieerd, is gedefinieerd in termen van deze schattingen. Geef de combinatiefunctie in een figuur weer. Leg uit hoe u aan uw antwoord komt.

Opgave 6

a. Beschouw de volgende verzameling produktieregels:

$$\begin{aligned}\{&R_1 : \textbf{if } \mathit{known}(y) \textbf{ then } \mathit{add}(w, A) \textbf{ with } \mathit{cf} = 0.3 \textbf{ fi},\\ &R_2 : \textbf{if } \mathit{lessthan}(y, 95) \textbf{ and } \mathit{same}(w, A) \textbf{ then } \mathit{add}(x, B) \textbf{ with } \mathit{cf} = 0.8 \textbf{ fi},\\ &R_3 : \textbf{if } \mathit{notsame}(x, C) \textbf{ then } \mathit{add}(z, D) \textbf{ with } \mathit{cf} = 0.8 \textbf{ fi},\\ &R_4 : \textbf{if } \mathit{same}(x, B) \textbf{ or } \mathit{same}(x, C) \textbf{ then } \mathit{add}(z, D) \textbf{ with } \mathit{cf} = 0.5 \textbf{ fi},\\ &R_5 : \textbf{if } \mathit{same}(z, D) \textbf{ then } \mathit{add}(u, F) \textbf{ with } \mathit{cf} = 1.0 \textbf{ fi}\}\end{aligned}$$

Met de conclusies van de produktieregels zijn zekerheidsfactoren geassocieerd. In bovenstaande regels is de variabele y eenwaardig; de overige variabelen zijn meerwaardig. Vraagbaar is alleen de variabele y; de gebruiker geeft voor y desgewenst de waarde 85 met de zekerheidsfactor $\mathit{cf} = 1.0$. De feitenverzameling is initieel leeg.

Veronderstel nu dat u het doel van top-down inferentie met deze regels is; voor het redeneren met onzekerheid wordt het certainty factor model gebruikt waarin bij de evaluatie van de predikaten een drempelwaarde van 0.2 wordt gehanteerd. Teken het inferentienetwerk dat bij toepassing van top-down inferentie met bovengegeven regels en feiten resulteert. Breid hiertoe het inferentienetwerk formalisme uit voor het geval van een variabele–waarde representatie. Geef de feitenverzameling na afloop van de inferentie. Laat zien welke regels tijdens de inferentie geslaagd zijn en welke gefaald hebben.

In het certainty factor model wordt bij de evaluatie van predikaten meestal gewerkt met een drempelwaarde, zoals ook in deze opgave. De keuze van deze drempelwaarde kan effect hebben op de feitenverzameling die met top-down inferentie met een gegeven regelverzameling resulteert. Beschouw nu nogmaals de bovengegeven verzameling produktieregels. Bij welke drempelwaarden zal de feitenverzameling die bij top-down inferentie met deze regels resulteert, veranderen? Motiveer uw antwoord.

b. In de theorie van Dempster en Shafer geven de geloofwaardigheidsfunctie (belief function) Bel en de aannemelijkheidsfunctie (plausibility function) Pl respectievelijk een ondergrens en bovengrens van het totale vertrouwen in een gebeurtenis $x \subseteq \Theta$ weer, waarin Θ de onderscheidingsverzameling (frame of discernment) is. In het geval dat voor elke $x \subseteq \Theta$ geldt:

$$\mathrm{Pl}(x) - \mathrm{Bel}(x) = 0 \tag{1}$$

vallen de theorie van Dempster en Shafer en de waarschijnlijkheidsrekening samen. Bewijs dat uit vergelijking (1) volgt dat de kern (core) van de waarschijnlijkheidstoekenning (basic probability assignment) m slechts bestaat uit singleton verzamelingen, en dat de functies Bel en Pl dan een kansverdeling definiëren op Θ.

Opgave 7

a. In het certainty-factor model van Shortliffe en Buchanan zijn twee maten gedefinieerd voor het tot uitdrukking brengen van onzekerheid met betrekking tot de juistheid van bepaalde aanwijzingen: de maat van vertrouwen (measure of belief) MB, en de maat van wantrouwen (measure of disbelief) MD. De beide maten zijn zodanig gedefinieerd dat als $\mathrm{MB}(h, e) > 0$, dan $\mathrm{MD}(h, e) = 0$ en omgekeerd.

   Laat nu aan de hand van een klein voorbeeld zien dat de combinatieformules in het certainty-factor model tot waarden voor MB en MD kunnen leiden die strijdig zijn met de definitie van deze maten. Reken tevens voor dit voorbeeld de resulterende MB en MD uit.

b. Beschouw de onderscheidingsverzameling (frame of discernment) $\Theta = \{a, b, c\}$ en twee waarschijnlijkheidstoekenningen (basic probability assignments) m_1 en m_2 in de theorie van Dempster en Shafer. Deze functies zijn als volgt gedefinieerd:

$$m_1(x) = \begin{cases} 0{,}1 & \text{als } x = \Theta \\ 0{,}5 & \text{als } x = \{c\} \\ 0{,}4 & \text{als } x = \{a, c\} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

$$m_2(x) = \begin{cases} 0{,}2 & \text{als } x = \Theta \\ 0{,}2 & \text{als } x = \{a, b\} \\ 0{,}6 & \text{als } x = \{b, c\} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

   Teken het doorsnedetableau voor $m_1 \oplus m_2$. Bereken de waarde van $\mathrm{Bel}_1 \oplus \mathrm{Bel}_2(\{c\})$.

Opgave 8

a. Door D.E. Heckerman is de certainty-factor functie $\mathrm{CF}(h, e)$ in het certainty-factor model van Shortliffe en Buchanan geherdefinieerd met het doel het model meer in overeenstemming te brengen met de kansrekening. De certainty-factor functie $\mathrm{CF}(h, e)$ in het model van Heckerman is als volgt gedefinieerd:

$$\mathrm{CF}(h, e) = \begin{cases} \frac{\lambda - 1}{\lambda} & \text{als } \lambda \geq 1 \\ \lambda - 1 & \text{anders} \end{cases}$$

   waarin $\lambda = P(e|h)/P(e|\bar{h})$ de (positieve) waarschijnlijkheidsverhouding (likelihood ratio) is.

   Bewijs dat de zekerheidsfactor die resulteert door toepassing van de combinatiefunctie voor co-concluderende produktieregels in het certainty-factor model, met de CF-functie van Heckerman, voor $\lambda \geq 1$, individuele waarschijnlijkheidsverhoudingen op dezelfde wijze combineert als de combinatiefunctie voor co-concluderende produktieregels in de subjectieve Bayesiaanse methode.

b. Beschouw de volgende verzameling produktieregels in een expertsysteem waarin gebruik gemaakt wordt van top-down inferentie alsmede van een methode voor het redeneren met onzekerheid:

$$\{R_1 : \textbf{if } a \textbf{ and } b \textbf{ then } c_{1.0} \textbf{ fi},$$
$$R_2 : \textbf{if } f \textbf{ then } c_{0.5} \textbf{ fi}\}$$

In deze regelverzameling is van de precieze structuur van condities en conclusies geabstraheerd.

(1) Veronderstel dat voor het redeneren met onzekerheid in dit expertsysteem gebruik gemaakt wordt van de theorie van Dempster en Shafer, met de aanpassingen volgens M. Ishizuka. Hierbij stellen de onzekerheidsmaten, die met de conclusies van bovenstaande regels zijn geassocieerd, de waarschijnlijkheidsgetallen (basic probability numbers) $m_{a \textbf{ and } b}(c) = 1$ en $m_f(c) = 0.5$ voor. Neem nu aan dat bovendien de aanwijzingen a, b en f gegeven zijn met $\mathrm{Bel}_{e'}(a) = 0.4$, $\mathrm{Bel}_{e'}(b) = 0.2$ en $\mathrm{Bel}_{e'}(f) = 0.2$ (e' stelt hierin de verzameling van alle aanwijzingen voor).

Bereken nu de onzekerheid met betrekking tot de hypothese c, dat wil zeggen $\mathrm{Bel}_{e'}(c)$.

(2) Veronderstel nu dat voor het redeneren met onzekerheid vervolgens gekozen wordt voor het certainty-factor model van Shortliffe en Buchanan. De volgende zekerheidsfactoren zijn gegeven: $\mathrm{CF}(c, a \textbf{ and } b) = 1$, $\mathrm{CF}(c, f) = 0.5$, $\mathrm{CF}(a, e') = 0.4$, $\mathrm{CF}(b, e') = 0.2$, $\mathrm{CF}(f, e') = 0.2$.

Bereken nu de zekerheidsfactor voor c.

Vergelijk de uitkomsten van Opgave b.1 en b.2 en verklaar eventuele verschillen en overeenkomsten aan de hand van de combinatiefuncties.

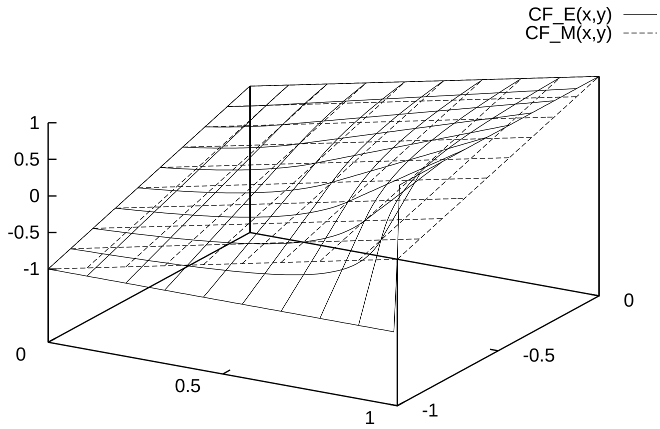
Opgave 9

a. Beschouw de volgende verzameling produktieregels $\mathcal{R}$:

$$R_1 : \textbf{if } a \textbf{ or } b \textbf{ then } c_{0.8} \textbf{ fi}$$
$$R_2 : \textbf{if } e \textbf{ then } a_{0.8} \textbf{ fi}$$
$$R_3 : \textbf{if } f \textbf{ then } b_{1.0} \textbf{ fi}$$

met de volgende (initiële) feitenverzameling $F = \{e_{0.7}, f_{0.5}\}$, waarin geabstraheerd is van de structuur van condities, conclusies en feiten.

Geef aan onder welke veronderstellingen de subjectieve Bayesiaanse methode toegepast kan worden voor de berekening van de onzekerheid met betrekking tot de hypothese c. Pas deze veronderstellingen toe bij het berekenen van $P(c|e')$, waarbij in e' alle gegeven aanwijzingen verwerkt zijn. Zijn deze veronderstellingen naar uw mening altijd verantwoord? Motiveer uw antwoord.



Figuur 1: Combinatiefuncties in MYCIN en EMYCIN.

b. In MYCIN is de certainty-factor functie als volgt gedefinieerd:

$$\mathrm{CF}_M(h,e) = \mathrm{MB}(h,e) - \mathrm{MD}(h,e)$$

In EMYCIN, daarentegen, wordt de volgende definitie van de certainty-factor functie aangehouden:

$$\mathrm{CF}_E(h,e) = \frac{\mathrm{MB}(h,e) - \mathrm{MD}(h,e)}{1 - \min\{\mathrm{MB}(h,e), \mathrm{MD}(h,e)\}}$$

Deze definities kunnen tot verschillende resultaten leiden voor co-concluderende produktieregels, waarbij $\mathrm{MB}(h, e'_1 \textbf{ co } e'_2) > 0$ en $\mathrm{MD}(h, e'_1 \textbf{ co } e'_2) > 0$. In Figuur 1 is een grafiek van beide functies voor bovengenoemde situatie weergegeven. Stel, bijvoorbeeld, $\mathrm{MB}(h, e'_1 \textbf{ co } e'_2) = 0.95$ en $\mathrm{MD}(h, e'_1 \textbf{ co } e'_2) = 0.9$, dan geldt: $\mathrm{CF}_M(h, e'_1 \textbf{ co } e'_2) = 0.05$ en $\mathrm{CF}_E(h, e'_1 \textbf{ co } e'_2) = 0.5$, waarin met het subscript M het resultaat van het MYCIN-model en met het subscript E het resultaat van het EMYCIN-model wordt aangeduid.

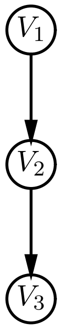
Geef een intuïtieve verklaring in termen van gerealiseerd redeneergedrag voor het verschil in resultaat tussen beide functies.

Opgave 10

a. Ph. Smets[1] heeft een modificatie van de theorie van Dempster en Shafer voorgesteld, waarbij voor de basic probability assignment m (BPA of waarschijnlijkheidstoekenning) slechts de axioma's:

(1) $m(x) \geq 0, \forall x \subseteq \Theta$,

[1] Ph. Smets, Belief functions, In: Ph. Smets, E.H. Mamdani, D. Dubois & H. Prade (eds.), *Non-Standard Logics for Automated Reasoning*, Academic Press, London, 1988, pp. 253-286.



$P(v_1) = 0.4, P(\neg v_1) = 0.6$

$P(v_2|v_1) = 0.3, P(\neg v_2|v_1) = 0.7$
$P(v_2|\neg v_1) = 0.9, P(\neg v_2|\neg v_1) = 0.1$

$P(v_3|v_2) = 0.7, P(\neg v_3|v_2) = 0.3$
$P(v_3|\neg v_2) = 0.1, P(\neg v_3|\neg v_2) = 0.9$

Figuur 2: Bayesian network; de notatie $\neg v$ staat voor $V = \mathit{false}$ en v voor $V = \mathit{true}$.

(2) $\sum_{x \subseteq \Theta} m(x) = 1$

moeten gelden. De lege hypothese $\emptyset$ wordt in het model van Smets opgevat als de verzameling onbekende hypothesen die geen deel uitmaken van Θ.

In Utrecht worden de gemoederen bezig gehouden door een intrigerende moordzaak. Er zijn drie verdachten in deze moordzaak: Rob N., Maria X. en Piet K. Twee personen zijn getuigen geweest van de moord. Zij willen anoniem blijven; we noemen ze getuige 1 en 2. In Tabel 1 is hun vertrouwen $m(x)$ weergegeven dat één van de personen de moord gepleegd heeft. Zoals men uit de tabel kan

	Getuige 1	Getuige 2
Rob N.	0.99	0
Maria X.	0.01	0.01
Piet K.	0	0.99

Tabel 1: Getuige-informatie in de moordzaak.

aflezen, bevat de getuige-informatie tegenstrijdigheden. Zo is getuige 1 er vrij zeker van dat Rob N. de moord gepleegd heeft, terwijl volgens getuige 2 Piet K. de schuldige is.

Onderzoek de consequenties van het combineren van de informatie in de getuigeverklaringen door respectievelijke toepassing van het model van Smets en de oorspronkelijke theorie van Dempster en Shafer voor de vaststelling of Rob N., Maria X. of Piet K. schuldig is. Verklaar welke van de twee benaderingen u het meeste aanspreekt.

b. Bewijs dat de combinatiefunctie voor co-concluderende produktieregels in het certainty-factor model voor positieve certainty factors ($\mathrm{CF}(h, e'_1\ \mathbf{co}\ e'_2)$) onder bepaalde voorwaarden opgevat kan worden als de kans $P(h|e'_1 \cup e'_2)$. Welke veronderstellingen zijn in dit geval noodzakelijk?

Opgave 11

Zij $\mathcal{B} = (G, P)$ een Bayesian network met acyclisch gerichte graaf $G = (V(G), A(G))$ en samengestelde kansverdeling P, zoals getoond in Figuur 2.

a. Welke kansinformatie moet beschikbaar zijn voor V_2 om locaal in V_2 de (marginale) kansverdeling $P(V_2)$ te kunnen uitrekenen?

b. Neem aan dat $V_1 = \mathit{true}$ geobserveerd is. Bepaal nu $P^{\mathcal{E}}(V_3) = P^{V_1=\mathit{true}}(V_3) = P(V_3 \mid V_1 = \mathit{true})$.

c. Als nu, naast $V_1 = \mathit{true}$, tevens voor V_3 de waarde *false* geobserveerd is, wat worden dan de kansverdelingen $P^{\mathcal{E}}(V_i)$, voor $i = 1, 2, 3$ en $\mathcal{E} = \{V_1 = \mathit{true}, V_3 = \mathit{false}\}$?

Opgave 12

Belangrijke elementen van het certainty-factormodel kunnen worden geïnterpreteerd in termen van Bayesian networks. In deze opgave gaan we hier verder op in.

a. Geef de vertaling van de functie f_{prop} in de certainty-factorcalculus naar een Bayesian network, en geef de voorwaarden die moeten gelden voor de resulterende kansverdeling P.

b. Laat zien hoe f_{prop} zou kunnen worden hergedefinieerd, d.w.z. dichter bij de kansrekening worden gebracht, door tenminste één van de voorwaarden niet te laten gelden.

c. De combinatiefunctie f_{co} kan worden opgevat als een noisy-OR Bayesian network. Laat zien hoe deze combinatiefunctie eruit zou zien als i.p.v. een noisy-OR gebruik gemaakt zou worden van de noisy-AND. (Bij de noisy-AND wordt een logische AND gebruikt voor de definitie van de kans $P(e \mid C_1, \ldots, C_n)$.)

Opgave 13

Beschouw het Markov Logic Network $(F, 0.5)$, waarbij F een formule is in eerste-orde predicatenlogica en $w = 0.5$ een gewicht is:

$0.5 \quad \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \vee \neg Q(y, z))$

met verzameling constanten $C = \{1, 2\}$.

a. Teken het bijbehorend Markovnetwerk.

b. Bepaal alle ware instantiaties van F.

c. Bepaal de kans $P(R(2, 1), Q(1, 2))$.

d. Bepaal de kans $P(R(2, 1))$.